Digitized by Google

Staatliche Bibliothek
Regensburg
G. 1966/737

Lehrbuch
der
Polygonometrie
und
Markscheidekunst
zum Gebrauche
öffentlicher Vorlesungen
auf der
churfürstl. baierischen Universität
in Landshut,
verfaßt vom
Maurus Magold,
churfürstl. geistl. Rathe und öffentl. ordentl. Professor
der Mathematik allda.

Bibliothek des K. Alten Gymnasiums in Regensburg.

STUDIEN BIBLIOTHEK REGENSBURG

Mit 6 Kupfern, und 4 gedruckten Tabellen.

Mit Censurfreyheit der churfürstl. Universität.

Landshut
in der Anton Weberschen Buchhandlung.
1804.

Vorrede.

Während ich die Geometrie und Trigonometrie bearbeitete, bekam ich Däzels Anfangsgründe der Goniometrie zu Gesichte; aus Mangel der Zeit und des Raumes nahm ich davon nur die ersten Anfangsgründe in die Trigonometrie auf, und wies den Anfänger in Rücksicht der fernern Entwicklung und Anwendung auf diese Schrift selbst zurücke. In der Folge erhielt ich auch Neumanns Beyträge zur practischen Geometrie; durch diese und vorzüglich durch von Oppels Anhang der Anleitung zur Markscheidekunst wurde ich immer mehr aufmerksam gemacht auf die Verbindung der Polygonometrie nicht nur mit der practischen Geometrie, sondern auch mit der Markscheidekunst, so daß ich mich endlich entschloß, die Polygonometrie vollständig in gegenwärtiges Lehrbuch aufzunehmen. Däzels und Neumanns Abhandlungen legte ich zum Grunde, nur wählte ich statt der äussern, oder Nebenwinkel, die innern vorkommenden Winkel der Figur selbst.

So

So klassisch von Oppels Werke, so trefflich Kästners Beyträge, so groß Lempe's Verdienste um die Markscheidekunst sind, so ist doch noch kein brauchbares Lehrbuch für die Markscheidekunst meines Wissens gemäß vorhanden; ich suchte daher dem gegenwärtigen alle mir mögliche Vollständigkeit zu geben (in der practischen Geometrie durfte ich den Anfänger zu seiner fernern Ausbildung nur auf Tob. Mairs Unterricht zur practischen Geometrie hinweisen). Herr von Voith, ehedem churfürstl. Oberverweser zu Bodenwehr, und dermal Landes-Directionsrath in Amberg, hatte die Güte, mir manche sehr nützliche Bemerkungen und Aufschlüsse mitzutheilen, zugleich lernte ich seine Bemühungen zur Verbesserung der Markscheiderinstrumente kennen. Ich hielt es daher zur Vollständigkeit meines Lehrbuches sehr zuträglich, seine über diesen Gegenstand verfaßte Abhandlung, nebst den von ihm verfaßten Markscheidertabellen, am Ende als Anhang beyzufügen.

Die höhere Geometrie bearbeitete ich wieder nach Carnot's Idee, bey deren Anwendung ich nicht die mindeste Beschwerniß zu bekämpfen hatte, zugleich benutzte ich ausser den im I. Theile

an-

angeführten Werken, Klügels, Langsdorfs und Massenbachs Schriften über diesen Gegenstand. Bey der Anwendung der höhern Geometrie auf die Vermessung der Fäßer hätte ich gerne dem Publicum mehrere Versuche vorgelegt, allein ich konnte, so viel ich mir auch Mühe gab, nicht mehrere Data erhalten; es ist immer etwas seltenes Leute zu finden, die zu solchen Unternehmungen den nöthigen Adparat, Zeit und guten Willen besitzen, so etwas muß unter Veranstaltung und Unterstützung höherer Stellen geschehen.

In Rücksicht der litterarischen Anzeigen, und Recensionen (Erlanger Litteraturzeitung den 18. Jun. 1802; Oberdeutsche allgemeine Litteraturz. den 16. Dec 1802, und Jenäer allg. Literaturzeitung den 12. Aug. 1802 und 3. Novemb. 1803) über die beyden ersten Theile danke ich den Verfassern für ihre humane Behandlung. Da ich die von mir bisher entdeckten Fehler meines Lehrbuches selbst in den öffentlichen Vorlesungen rüge, so bin ich um so weniger empfindlich, wenn dieses nemliche vom Jenäer Recensenten geschah, und in der Folge geschieht. Das über den Lehrsatz: unendlich kleine Bögen sind ihren Sehnen gleich: oder vielmehr

über

über den von mir angeführten Beweis desselben, gefällte Urtheil hat zuverläßig darin seinen Grund, daß Recensent die am Ende des 272. §. Seite 301 und 302 beygefügte Anmerkung übersehen hat: da ich auch von dem scharfsichtigsten Recensenten nicht fodern kann, daß er allemal das ganze Buch, selbst bis auf die Anmerkungen lesen soll; so will ich dadurch dem Recensenten keinen Vorwurf machen, sondern nur mich vor dem Publicum rechtfertigen.

Gegenwärtiger dritter Theil, mit dem sich die reine Mathematik endet, wuchs mir unter der Hand zu einer Größe an, daß ich mich entschloß, solchen in zwey Abtheilungen zu zerlegen; die erste davon enthält die Polygonometrie und Markscheidekunst, die zweyte, die ebenfalls schon fertig, und beynahe ganz abgedruckt ist, begreifft die höhere Geometrie, und H. von Voiths Abhandlung nebst dessen Marscheidertabellen in sich.

Landshut den 31. May 1804.

Magold

Inhalt.

Die Polygonometrie.

Seite.

Einleitung: Vom Gegenstande der Polygonometrie 1

I. Hauptstück. Grundlehren der Polygonometrie 5

II. Hauptstück. Bestimmung der Seiten und Winkel geradliniger Figuren 39

I. Abschnitt. Bestimmung zweyer Seiten und eines Winkels 40

II. Abschnitt. Bestimmung einer Seite und zweyer Winkel 55

III. Abschnitt. Bestimmung dreyer Winkel . 81

Seite.

III. Hauptstück: Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes der Figuren zu ihren Seiten und Winkeln 93

I. Abschnitt. Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Deeyeckes zu seinen Seiten und Winkeln 93

II. Abschnitt. Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Viereckes zu seinen Seiten und Winkeln 107

III. Abschnitt. Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Vieleckes zu seinen Seiten und Winkeln 138

Die Markscheidekunst.

I. Hauptstück. Vom Gegenstande und den nothwendigen Vorkenntnissen der Markscheidekunst 157

I. Abschnitt. Erklärungen aus der Geognosie und dem Bergbau 157

II. Abschnitt. Von den beym Bergbau und in der Markscheidekunst üblichen Maaßen . . 169

III. Abschnitt. Von der Mittags- und der Magnetlinie 176

Seite.

II. Hauptstück. Von den Markscheider-Instrumenten 191

I. Abschnitt. Vom Lachterstabe, der Lachterschnur und Lachterkette 191

II. Abschnitt. Vom Gradbogen 197

III. Abschnitt. Vom Compasse 207

IV. Abschnitt. Von der Eisenscheibe und ihrem Surrogate, oder vom Vermessen: Winkel vermittels Schnüre 216

V. Abschnitt. Vom Winkelweiser 235

III. Hauptstück. Vom Markscheiden . . . 241

I. Abschnitt. Von Verrichtung und Einschreibung der Markscheiderzüge 242

II. Abschnitt. Von der Berechnung eines Zuges 255

III. Abschnitt. Vom Zulegen eines Zuges, oder von den Markscheider-Rissen 280

IV. Hauptstück. Von den Auflösungen der zum Behufe des Bergbaues vorkommenden Aufgaben 299

I. Abschnitt. Vom Wasserwägen 299

Seite

II. Abschnitt. Von der Abgabe zweyer übereinstimmenden Puncte 305

III. Abschnitt. Von der Lage der Gänge und der auf ihnen zutreibenden Oerter . . 326

IV. Abschnitt. Von der Bestimmung der Gränzen 391

Ein-

Polygonometrie.

Einleitung.

Vom Gegenstande der Polygonometrie.

§. 1.

Grundsatz:

Die Lage zweyer gerader Linien AF. AB, (Fig. 1 und 2) die in A zusammenstoßen, ist sowohl durch den hohlen Winkel, den sie auf der einen Seite, als durch den erhabenen Winkel, den sie auf der andern Seite bilden, vollkommen bestimmt.

§. 2.

Erklärungen:

a. Unter den **Winkeln einer geradlinigten Figur** versteht man die Winkel, welche die Linien auf der **innern** Seite der Figur bilden, so enthält die erste lauter hohle, hingegen die zweyte Figur bey C einen erhabenen Winkel, die übrigen aber sind ebenfalls hohle Winkel.

b. Bey einer **gebrochenen Linie** überhaupt, wenn man auf die Figur, welche etwa dadurch begränzet wird, keine Rücksicht nimmt, bestimmt man die Lage der einzelnen Linien gegen einander auf folgende Weise:

1. Allemal betrachtet man den Winkel an jeder Ecke so, daß man den hohlen Winkel vor sich hat, d. i., daß man sich ausserhalb den Schenkeln des hohlen Winkels befindet.

2. Bey der ersten Ecke, z. B. A (Fig. 3) nimmt man den hohlen als Bestimmungswinkel der beyden Linien AF, AB, und bemerkt die Stellung dieser Linien, wo im gegebenen Beyspiele erstere Seite AF Rechts, und leztere AB Links liegt.

3. Geht man nun zu den folgenden Ecken B, C, D, E, F in der angeführten Ordnung, so nimmt man, wo die einschließenden Seiten die nemliche Stellung haben, wie bey B, D, wo

ebenfalls die vorangehende Seite Rechts, und die folgende Links zu liegen kömmt, die hohlen als Bestimmungswinkel, wo hingegen

4. Die einschließenden Seiten, die umgekehrte Stellung haben, das ist, wo die vorangehende Seite Links, und die nachfolgende Rechts, wie bey C, E, F liegt, die erhabenen als Bestimmungswinkel.

5. Läge aber bey der ersten Ecke für den hohlen Winkel die vorhergehende Seite Links, und die folgende Rechts, wie z. B. (Fig. 2), wenn man von F gegen E, D, C, B, A zu, das ist, in voriger umgekehrter Ordnung der Ecke, die Lage der gebrochenen Linie bestimmte, so nimmt man allemal da, wo die vorangehende Linie Links, und die folgende Rechts liegt, den hohlen, wie bey F, D, B, A, und bey umgekehrter Stellung der Seiten, wie z. B. bey C den erhabenen als Bestimmungswinkel für die Lage der Seiten.

I. Zusatz: Die innern Winkel einer Figur, und die Bestimmungswinkel einer gebrochenen Linie werden in der Folge immer mit den größern Buchstaben A, B, C, D, E, F (Fig. 1—3), und die anliegenden Seiten AB, BC, CD, DE, EF, FA der Ordnung nach mit den kleinern Buchstaben a, b, c, d, e, f, bezeichnet.

I. Zusatz: Jedes Vieleck von n Seiten hat eben so viele Ecke (§. 15 Geom.) mithin 2 n Stücke.

§. 3.

Erklärungen:

Die Wissenschaft aus 2 n — 3 Stücken einer geradlinigten Figur von n Seiten, die übrigen 3 unbekannten Stücke, wenn sie nicht lauter Seiten sind, durch Rechnung zu finden, heißt **Goniometrie**, oder, in wie ferne sie vorzüglich auf die Bestimmung der Vielecke angewandt wird, **Polygonometrie.**

Zusatz: Da die Berechnung der unbekannten Stücke vermittels trigonometrischer Linien geschieht, so ist die Polygonometrie eigentlich ein Theil, oder Erweiterung der Trigonometrie.

I. Hauptstück.

Grundlehren der Polygonometrie.

§. 4.

Grundsatz:

Nimmt man bey einer gebrocheneu Linie ABCDEF (Fig. 1 — 3) eine beliebige gerade Linie AF zur Abscissenlinie (§. 205 Geom.), und zieht aus jeder Ecke auf sie rechtwinklichte Ordinaten, so ist durch die Lage und Größe aller entsprechenden Abscissen und Ordinaten die Lage aller Ecke, mithin die Lage und Größe der gebrochenen Linie selbst bestimmt.

II. **Zusatz:** Durch die Lage und Größe aller Abscissen und Ordinaten ist eine geradlinigte Figur vollkommen bestimmt.

I. **Zusatz:** Nimmt man die Seite AF (Fig. 1) als Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct, so wird für die erste Ecke A die Abscisse $= 0$, die der Ecke B entsprechende Abscisse Am negativ, für die übrigen Ecken aber jede entsprechende Abscisse At, As u. s. f. positiv, und für die letzte Ecke F ist solche $=$ AF $=$ f.

III. Zusatz: Die Ordinaten bey der angeführten Abscissenlinie AF sind für die erste und letzte Ecke = o, für alle übrigen (Fig. 1 und 2) positiv, hingegen (Fig. 3) sind die Ordinaten Bm, Ds für die Ecke B, D positiv, und die Ordinaten Ct, Er für die Ecke C, E negativ.

IV. Zusatz: Der Kürze wegen wird bey den Verhältnissen trigonometrischer Linien der Halbmesser in der Folge immer = 1 gesetzet.

§. 5.

Lehrsatz:

Wenn man in einer geradlinigten Figur (Fig. 1) eine beliebige Seite, oder bey einer gebrochenen Linie überhaupt (Fig. 3) eine beliebige gerade Linie AF als Abscissenlinie, und A für ihren Anfangspunct nimmt, so erhält man für jede beliebige Ecke derselben

I. die entsprechende Ordinate, wenn man jede von A bis zur gegebenen Ecke liegende Seite in den Sinus aller jener Winkel, welche jedesmal von A bis an diese Seite vorkommen, multipliciret, und die einzelnen Producte positiv oder negativ nimmt, je nachdem die Anzahl der Winkel ungerad, oder gerad ist, das ist, die entsprechende Ordinate

für A = o
— B = a sin. A
— C = sin. A — b sin. (A + B)

für

für D = a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)
---- E = a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)
— d sin. (+A + B + C + D)
---- F = o = a sin. A — b sin. (A + B)
+ c sin. (A + B + C) — d sin. (A + B + C + D)
+ e sin. (A + B + C + D + E).

II. die entsprechende Abscisse, wenn man jede Seite auf die nemliche Art in den Cosinus obiger Winkel multipliciret, und wieder die Producte, welche die Winkel paarweise enthalten, negativ setzet, das ist die entsprechende Abscisse

für A = o
--- B = a cos. A
--- C = a cos. A — b cos. (A + B)
--- D = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A + B + C)
---- E = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A + B + C) — d cos. (A + B + C + D)
---- F = f = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A + B + C) — d cos. (A + B + C + D)
+ e cos. (A + B + C + D + E).

I. Beweis: Wenn die Abscissenlinie AF (Fig. 1) eine Seite einer geradlinigten Figur von lauter hohlen Winkeln ist.

1. Man ziehe aus jeder Ecke auf die Abscissenlinie einen Perpendikel, oder die rechtwinklichte Ordinate,

2. um zwischen einer Ordinate und ihrer nächst vorhergehenden und nachfolgenden den Unterschied zu bestimmen, ziehe man noch durch die Ecke B, C, E zur Abscissenlinie die Parallelen Bo, np, qE, bis solche mit den beyden zunächst gelegenen Ordinaten zusammen treffen, so ist

3. die Ordinate für die Ecke

A = o (§. 4. III. Zus.)
B = Bm
C = Ct = mn (§. 45. IV. Zusatz, Geometrie)
= Bm + Bn
D = Ds = ps + Dp = Ct + Dp = Bm + Bn + Dp
E = Er = qs = Ds — Dq = Bm + Bn + Dp — Dq
F = o (§. 4. III. Zus.) = Er — Er = Bm + Bn + Dp — Dq — Er.

4. Die Abscisse für die Ecke

A = o (§. 4. II. Zus.)
B = — Am, weil sie mit AF eine entgegengesetzte Lage hat.
C = At = — Am + mt = — Am + Cn
D = As = At + ts = — Am + Cn + Cp
E = Ar = As + sr = — Am + Cn + Cp + qE
F = f (§. 4. II. Zus.) = Ar + rF = — Am + Cn + Cp + qE + rF.

5. Nun bezeichne man die spitzigen Winkel, welche die Seiten der Ordnung nach mit der Abscissen-

linie

linie, oder mit den zu ihr gezogenen Parallelen einschließen mit den kleinen griechischen Buchstaben, das ist:

setze BAm $=\alpha$, BCn $=\beta$, DCp $=\gamma$, DEq $=\delta$, EFA $=\varepsilon$, so ist

6. $\alpha = 2R - A$, wo R einen rechten Winkel bezeichnet.

$\beta = x = B - y = B - \alpha = B - 2R + A$
$= A + B - 2R$

$\gamma = C - R - BCo = C - R - (R - \beta)$
$= C - 2R + \beta$
$= A + B + C - 4R$

$\delta = R - EDq = R - (D - CDp) = R - D$
$+ (R - \gamma) = 2R - \gamma - D$
$= 6R - (A + B + C + D)$

$\varepsilon = R - rEF = R - (E - R - \delta) = 2R + \delta - E$
$= 8R - (A + B + C + D + E)$, mithin

7. Sin. α = sin. A (§. 292. IX. Zus. Trigon.)
cos. $\alpha = -$ cos. A (§. 296. IV. Zus. Trigon.)

8. Sin. $\beta = -$ sin. (A + B)
cos. $\beta = -$ cos. (A + B)

9. Sin. γ = sin. (A + B + C)
cos. γ = cos. (A + B + C) } (§. 304. V. Zus. Trigon.)

10. Sin. δ = sin. (A + B + C + D)
cos. $\delta = -$ cos. (A + B + C + D)

11. $\text{Sin. } \varepsilon = -\text{ sin. } (A+B+C+D+E)$

$\text{cos. } \varepsilon = \text{cos. } (A+B+C+D+E)$

12. Ferner ist:

a : Bm = 1 : sin. α, mithin

Bm = a sin. α = a sin. A (Nr. 7), und eben so

Bn = b sin. β = — b sin. (A + B) (Nr. 8)

Dp = c sin. γ = c sin. (A + B + C) (Nr. 9)

Dq = d sin. δ = d sin. (A+B+C+D) (Nr. 10)

Er = e sin. ε = — e sin. (A+B+C+D+E):

folglich sind

13. Die entsprechenden Ordinaten aus (Nr. 3)

für A = o

---- B = Bm = a sin. A

---- C = Bm + Bn = a sin. A — b sin. (A + B)

--- D = Bm + Bn + Dp = a sin. A

— b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)

--- E = Bm + Bn. + Dp — Dq

= a sin. A — b sin. (A+B) + c sin. (A+B+C)

— d sin. (A+B+C+D)

--- F = o = Bm + Bn + Dp — Dq — Er

= a sin. A — b sin. (A + B)

+ c sin. (A + B + C)

— d sin. (A + B + C + D)

+ e sin. (A+C+B+D+E)

welches der Inhalt vom Lehrsatze Nr. I ist.

14. Es ist aber auch

a : Am = 1 : cos. α, mithin

$Am = a \cos. \alpha = - a \cos. A.$ (Nr. 7)

$Cn = b \cos. \beta = - b \cos. (A + B)$ (Nr. 8)

$Cp = c \cos. \gamma = c \cos. (A + B + C)$ (Nr. 9)

$qE = d \cos. \delta = - d \cos. (A + B + C + D)$ (Nr. 10)

$rF = e \cos. \varepsilon = e \cos. (A + B + C + D + E)$ (Nr. 11)

15. Setzet man diese Werthe für die Abscissen in in Nr. 4, so ist die entsprechende Abscisse

für $A = 0$

$\cdots B = - Am = a \cos. A$

$\cdots C = - Am + Cn = a \cos. A - b \cos. (A + B)$

$\cdots D = - Am + Cn + Cp = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C)$

$\cdots E = - Am + Cn + Cp + qE$
$= a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - d \cos. (A + B + C + D)$

$\cdots F = f = - Am + Cn + Cp + qE + rF$
$= a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - d \cos. (A + B + C + D) + e \cos. (A + B + C + D + E)$

welches der Inhalt des Lehrsatzes Nr. II. ist.

II. **Beweis:** Für den Fall, wo die Figur auſſer hohlen, auch erhabene Winkel, wie z. B. (Fig. 2) enthält.

16. Wenn man die rechtwinklichten Ordinaten, und zur Abscissenlinie die Parallelen, wie Nr. 1 und 2, zieht, so ist

17. die Ordinate

für $A = o$
.... $B = Bm$
.... $C = Ct = mn = Bm - Bn$
.... $D = Ds = ps + Dp = Ct + Dp = Bm - Bn + Dp$
.... $E = Er = qs = Ds - Dq = Bm - Bn + Dp - Dq$
.... $F = o = Er - Er = Bm - Bn + Ep - Dq - Er,$

und

18. die für jede Ecke entsprechende Abscisse, und zwar

für $A = o$
.... $B = Am$
.... $C = At = Am + mt = Am + Cn$
.... $D = As = At + ts = Am + Cn + Cp$
.... $E = Ar = As + sr = Am + Cn + Cp + qE$
.... $F = f = Ar + rF = Am + Cn + Cp + qE + rF.$

19. Ferner ist nach der Bezeichnung Nr. 5

$$\alpha = A$$
$$\beta = R - CBn = R - (B - ABm) = R - B + (R - A)$$
$$= 2R - (A + B)$$
$$\gamma = C - 2R - \beta$$
$$= A + B + C - 4R$$

$\delta = R - EDp = R - (D - CDp) = R - D +$
$(R - \gamma) = 2R - \gamma - D$
$= 6R - (A + B + C + D)$
$\varepsilon = R - rEF = R - (E - R - \delta) = 2R + \delta - E$
$= 8R - (A + B + C + D + E)$, mithin

20. $\sin. \alpha = \sin. A$, $\cos. \alpha = \cos. A$;
$\sin. \beta = \sin. (A + B)$; $\cos. \beta = \cos. (A + B)$
$\sin. \gamma = \sin. (A + B + C$; $\cos. \gamma = \cos. (A + B + C)$
$\sin. \delta = \sin. (A + B + C + D)$;
$\cos. \delta = - \cos. (A + B + C + D)$
$\sin. \varepsilon = - \sin. (A + B + C + D + E)$;
$\cos. \varepsilon = \cos. (A + B + C + D + E)$.

21. Alſo iſt wieder wie (Nr. 12)
$Bm = a \sin. \alpha = a \sin. A$
$Bn = b \sin. \beta = b \sin. (A + B)$
$Dp = c \sin. \gamma = c \sin. (A + B + C)$
$Dq = d \sin. \delta = d \sin. (A + B + C + D)$
$Er = e \sin. \varepsilon = e \sin. (A + B + C + D + E)$.

22. Setzet man dieſe Werthe bey Nr. 17, ſo iſt die Ordinate
für $A = o$
$\cdots B = Bm = a \sin. A$
$\cdots C = Bm - Bn = a \sin. A - b \sin. (A + B)$
$\cdots D = Bm - Bn + Dp = a \sin. A - b \sin. (A + B)$
$+ c \sin. (A + B + C)$

für

für E = Bm — Bn + Dp — Dq
= a sin.A — b sin.(A + B) + c sin.(A + B + C)
— d sin. (A + B + C + D)
--- F = Bm — Bn + Dp — Dq — Er
= a sin.A — b sin.(A + B) + c sin.(A + B + C)
— d sin. (B + B + C + D)
+ e sin. (A + B + C + D + E)

dem Inhalte des Lehrsatzes Nr. I. gemäß.

23. Eben so wie mit Nr. 14 ist wieder in Verbindung mit Nr. 20

Am = a cos. α = a cos. A
Cn = b cos. β = b cos. (A + B)
Cp = c cos. γ = c cos. (A + B + C)
qE = d cos. δ = — d cos. (A + B + C + D)
rF = e cos. ε = e cos. (A + B + C + D + E)

24. Setzet man diese Werthe Nr. 18, so ist Abscisse

für A = o
--- B = Am = a cos. A
--- C = Am + Cn = a cos. A — b cos. (A + B)
--- D = Am + Cn + Cp = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A + B + C)
--- E = Am + Cn + Cp + qE
= a cos.A — b cos.(A + B) + c cos.(A + B + C)
— d cos. (A + B + C + D)

für

für $F = f = Am + Cn + Cp + qE + rF$

$= a \cos.A - b \cos.(A+B) + c \cos.(A+B+C)$

$- d \cos.(A+B+C+D)$

$+ e \cos.(A+B+C+D+E)$

welches dem Inhalte des Lehrsatzes Nr. II. gemäß ist.

III. Beweis: Für jede gebrochene Linie, selbst wenn sie von der Abscissenlinie mehrmal durchschnitten wird (Fig. 3).

25. Man construire die Ordinaten, und zur Abscissenlinie die Parallelen, wie Nr. 1 und 2, so ist die entsprechende Ordinate

für $A = o$

.... $B = Bm$

.... $C = Ct$ (§. 4. III. Zus.) $= Bm - Bn$

.... $D = Ds = Ct + Dp = Bm - Bn + Dp$

.... $E = Er = Ds - Dq = Bm - Bn + Dp - Dq$

.... $F = o = - Er + Er = Bm - Bn + Dp - Dq + Er$

26. Die entsprechende Abscisse

für $A = o$

.... $B = Am$

.... $C = At = Am + Cn$

.... $D = As = Am + Cn + Cp$

.... $E = Ar = Am + Cn + Cp + qE$

.... $F = f = Am + Cn + Cp + qE + rF$

27. Ferner ist nach der Bezeichnung Nr. 5

$\alpha = A$

$\beta = u = 2R - (A + B)$

$\gamma = C - 2R - \beta = A + B + C - 4R$

$\delta = y = 2R - D - x = 2R - D - \gamma = 6R -$
$(A + B + C + D)$

$\varepsilon = z = E - 2R - \delta = A + B + C + D + E - 8R,$
mithin

28. $\sin. \alpha = \sin. A$; $\cos. \alpha = \cos. A$

$\sin. \beta = \sin. (A + B)$; $\cos. \beta = -\cos. (A + B)$

$\sin. \gamma = \sin. (A + B + C)$; $\cos. \gamma = \cos. (A + B + C)$

$\sin. \delta = \sin. (A + B + C + D)$;

$\cos. \delta = -\cos. (A + B + C + D)$

$\sin. \varepsilon = \sin. (A + B + C + D + E)$;

$\cos. \varepsilon = \cos. (A + B + C + D + E)$.

29. Nun ist wie Nr. 12

$Bm = a \sin. \alpha = a \sin. A$

$Bn = b \sin. \beta = b \sin. (A + B)$

$Dp = c \sin. \gamma = c \sin. (A + B + C)$

$Dq = d \sin. \delta = d \sin. (A + B + C + D)$

$rE = e \sin. \varepsilon = e \sin. (A + B + C + D + E)$

30. Setzet man diese Werthe in Nr. 25, so ist die Ordinate

für $A = o$

.... $B = Bm = a \sin. A$

für

für $C = Bm - Bn = a \sin. A - b \sin. (A + B)$

$\cdots D = Bm - Bn + Dp = a \sin. A - b \sin. (A + B)$
$+ c \sin. (A + B + C)$

$\cdots E = Bm - Bn + Dp - Dq$
$= a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C)$
$- d \sin. (A + B + C + D)$

$\cdots F = o = Bm - Bn + Dp - Dq + rE$
$= a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C)$
$- d \sin. (A + B + C + D)$
$+ e \sin. (A + B + C + D + E)$

welches der Inhalt des Lehrsatzes Nr. I. ist.

31. Eben so ist noch Nr. 14 in Verbindung mit Nr. 28

$Am = a \cos. \alpha = a \cos. A$

$Cn = b \cos. \beta = - b \cos. (A + B)$

$Cp = c \cos. \gamma = c \cos. (A + B + C)$

$qE = d \cos. \delta = - d \cos. (A + B + C + D)$

$rF = e \cos. \varepsilon = e \cos. (A + B + C + D + E)$,

mithin

32. wenn man diese Werthe bey Nr. 26 substituiret, so wird die entsprechende Abscisse

für $A = o$

$\cdots B = Am = a \cos. A$

$\cdots C = Am + Cn = a \cos. A - b \cos. (A + B)$

$\cdots D = Am + Cn + Cp = a \cos. A - b \cos. (A + B)$
$+ c \cos. (A + B + C)$

für $E = Am + Cn + Cp + qE$

$= a \cos.A - b \cos.(A+B) + c \cos.(A+B+C)$

$- d \cos.(A+B+C+D)$

.... $F = f = Am + Cn + Cp + qE + rF$

$= a \cos.A - b \cos.(A+B) + c \cos.(A+B+C)$

$- d \cos.(A+B+C+D)$

$+ e \cos.(A+B+C+D+E)$

welches der Inhalt des Lehrsatzes Nr. II. ist.

I. Zusatz: Die beyden Lehrsätze lassen sich auf eine beliebige Anzahl Seiten erweitern und einschränken, so ist z. B. für das Dreyeck ABC (Fig. 4)

I. $a \sin. A - b \sin.(A+B) = 0$, und

II. $c = a \cos. A - b \cos.(A+B)$;

bezeichnet man in der ersten Gleichung die den Winkeln opponirten Seiten mit den nemlichen kleinen Buchstaben, so ist:

$c \sin. A - a \sin.(A+B) = 0$, oder

$c \sin. A = a \sin. C$, mithin $a : c = \sin. A : \sin. C$

(§. 330. Trigonom.)

II. Zusatz: Nimmt man (Fig. 1 und 3) zwar $AF = f$ zur Abscissenlinie, aber Statt A den Punct F als Anfangspunct, so wird die Ordinate

für $F = o$

.... $E = e \sin. F$

.... $D = e \sin. F - d \sin.(F+E)$

.... $C = e \sin. F - d \sin.(F+E) + c \sin.(F+E+D)$

.... $B = e \sin. F - d \sin.(F+E) + c \sin.(E+E+D)$

$- b \sin.(F+E+D+C)$

für

für A = o = e sin.F — d sin.(F + E) + c sin.(F + E + D)
— b sin. (F + E + D + C)
+ a sin. (F + E + D + C + B)

III. Zusatz: Für die Ordinate einer jeden Ecke giebt es also zwey verschiedene Gleichungen.

IV. Zusatz: Für eine andere Abscissenlinie, z. B. CD = c werden die beyden Gleichungen für die Ordinate einer jeden Ecke auf die nemliche Art bestimmet, so ist die Ordinate

für F = d sin. D — e sin. (D + E)
= b sin. C — a sin. (C + B) + f sin.(C + B + A)

V. Zusatz: Für den Anfangspunct F der Abscissenlinie AF wird die Abscisse

für F = o
.... E = e cos. F
.... D = e cos. F — d cos. (F + E)
.... C = e cos.F — d cos.(F + E) + c cos.(F + E + D)
.... B = e cos.F — d cos.(F + E) + c cos.(F + E + D)
— b cos. (F + E + D + C)
.... A = f = e cos. F — d cos. (F + E)
+ c cos. (F + E + D)
— b cos. (F + E + D + C)
+ a cos. (F + E + D + C + B)

VI. Zusatz: Die Abscissenlinie f läßt sich auf eine doppelte Art bestimmen (Lehrs. Nr. II. und V. Zus.)

VII. Zusatz: Nimmt man eine andere Seite, z. B. CD = c zur Abscissenlinie, so ist:

$$c = d \cos. D - e \cos. (D+E) + f \cos. (D+E+F) - a \cos. (D+E+F+A) + b \cos. (D+E+F+A+B)$$
$$= b \cos. C - a \cos. (C+B) + f \cos. (C+B+A) - e \cos. (C+B+A+F) + d \cos. (C+B+A+F+E).$$

VIII. Zusatz: Wenn man die für eine Ecke, z. B. D, aus verschiedenen Anfangspuncten A, F bestimmten Abscissen addirt, so giebt ihre Summe die Abscissenlinie; denn die Abscisse für D aus A ist

$$= As = a \cos. A - b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C)$$

hingegen für den Anfangspunct $F = Fs = e \cos. F - d \cos. (F+E)$,

folglich $As + Fs = f = a \cos. A - b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C) + e \cos. F - d \cos. (F+E)$.

§. 6.

Lehrsatz:

Bey einer gebrochenen in sich selbst zurück kehrenden Linie ABCDEFA (Fig. 1—3) erhält man die Tangens eines Winkels, z. B. A, wenn man die anliegende Seite a zur Abscissenlinie, und die folgende Ecke B zum Anfangspuncte nimmt, und für die vorhergehende Ecke F sowohl die entsprechende Ordinate, als Abscisse sucht, erstere durch die Differenz der Abscissenlinie und gefundenen letzten Abscisse dividirt, das ist:

tang.

$$\text{tang. } A = [b \sin. B - c \sin. (B+C) + d \sin.(B+C+D) - e \sin.(B+C+D+E)] : [a - b\cos. B + c\cos.(B+C) - d\cos.(B+C+D) + e\cos.(B+C+D+E)]$$

Beweis:

1. Für die Abscissenlinie $AB = a$ sind die beyden Gleichungen der entsprechenden Ordinate für die Ecke F:

$$f \sin. A = b \sin. B - c \sin. (B+C) + d \sin.(B+C+D) - e \sin.(B+C+D+E)$$

(§. 5, Lehrs. I, und dessen II. Zus.)

2. Ferner ist für eben die Ecke F und Abscissenlinie a

$$a = f \cos. A + b \cos. B - c \cos. (B+C) + d\cos.(B+C+D) - e\cos.(B+C+D+E)$$

(§. 5, Lehrs. II, und VIII. Zus.), mithin.

3. $$f \cos. A = a - b \cos. B + c \cos. (B+C) - d\cos.(B+C+D) + e\cos.(B+C+D+E)$$

folglich

4. $\frac{f \sin. A}{f \cos. A} = \text{tang. } A$ (§. 301. Trigon.); das ist:

5. $$\text{tang. } A = [b \sin. B - c \sin. (B+C) + d \sin.(B+C+D) - e \sin.(B+C+D+E)] : [a - b\cos. B + c\cos.(B+C) - d\cos.(B+C+D) + e\cos.(B+C+D+E)]$$

I. Zusatz: Gegenwärtige Formel läßt sich leicht auf jede beliebige Anzahl der Seiten erweitern oder beschränken, so ist für das Dreyeck ABC (Fig. 4)

$$\text{tang. A} = \frac{\text{b sin. B}}{\text{a} - \text{b cos. B}}.$$

II. Zusatz: Bezeichnet man nun wie gewöhnlich im Dreyecke die Winkel mit dem größern, und ihre opponirten Seiten mit den nemlichen kleinern Buchstaben, so wird

$$\text{tang. A} = \frac{\text{a sin. B}}{\text{c} - \text{a cos. B}} \text{ (§. 338. I. Zus. Trigon.)}$$

III. Zusatz: Für einen andern Winkel D (Fig. 1) wird ebenfalls

$$\text{tang. D} = [\text{e sin. E} - \text{f sin. (E+F)} + \text{a sin. (E+F+A)} - \text{b sin. (E+F+A+B)}] :$$
$$[\text{d} - \text{e cos. E} + \text{f cos. (E+F)} - \text{a cos. (E+F+A)} + \text{b cos. (E+F+A+B)}]$$

§. 7.

Lehrsatz:

Man erhält den Cosinus eines Winkels F einer gebrochenen in sich zurückkehrenden Linie ABCDEFA (Fig. 1 — 3), wenn man von der Summe der Quadrate der einschließenden Seiten, die Summe der Quadrate aller übrigen Seiten abzieht, und zum Reste die doppelten Producte aller Paar eben dieser letztern Seiten in den Cosinus der zwischen ihnen liegenden

genden Winkel addirt, aber jene Producte, wo die Winkel paarweise vorkommen, negativ nimmt, und am Ende alles mit dem doppelten Producte der einschließenden Seiten dividirt; das ist

$$\begin{aligned}\text{Cos. F} = [&e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab\cos.B \\ &- 2ac\cos.(B+C) + 2ad\cos.(B+C+D) \\ &+ 2bc\cos.C - 2bd\cos.(C+D) \\ &+ 2cd\cos.D] : 2ef.\end{aligned}$$

Beweis:

1. Für die Ecke E und die Abscissenlinie f sind die beyden Werthe der Ordinate (§. 5. Lehrs. I. und II. Zus.)

$$\begin{aligned}e\sin.F = &a\sin.A - b\sin.(A+B) + c\sin.(A+B+C) \\ &- d\sin.(A+B+C+D), \text{ mithin}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2.\ e^2\sin.F^2 = &a^2\sin.A^2 - 2ab\sin.A\sin.(A+B) \\ &+ b^2\sin.(A+B)^2 + 2ac\sin.A\sin.(A+B+C) \\ &- 2bc\sin.(A+B)\sin.(A+B+C) \\ &+ c^2\sin.(A+B+C)^2 \\ &- 2ad\sin.A\sin.(A+B+C+D) \\ &+ 2bd\sin.(A+B)\sin.(A+B+C+D) \\ &- 2cd\sin.(A+B+C)\times \\ &\sin.(A+B+C+D) \\ &+ d^2\sin.(A+B+C+D)^2.\end{aligned}$$

3. Ferner ist

$$\begin{aligned}f = &e\cos.F + a\cos.A - b\cos.(A+B) \\ &+ c\cos.(A+B+C) - d\cos.(A+B+C+D)\end{aligned}$$

(§. 5. Lehrsatz II., nebst II. und VIII. Zusatz), mithin

4. $f - e \cos. F = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - d \cos. (A+B+C+D)$, also

5. $f^2 - 2ef \cos. F + e^2 \cos. F^2 = a^2 \cos. A^2 - 2ab \cos. A \cos. (A+B) + b^2 \cos.(A+B)^2 + 2ac \cos. A \cos. (A+B+C) - 2bc \cos. (A+B) \cos. (A+B+C) + c^2 \cos. (A+B+C)^2 - 2ad \cos. A \cos. (A+B+C+D) + 2bd \cos.(A+B) \cos.(A+B+C+D) - 2cd \cos. (A+B+C) \cos. (A+B+C+D) + d^2 \cos. (A+B+C+D)^2$

6. Nun ist $\sin. A^2 + \cos. A^2$, und eben so $\sin.(A+B)^2 + \cos. (A+B)^2$ u. s. f. $= 1$ (§. 296. Trigon.)

7. Ferner $\sin. A \sin. (A+B) + \cos. A \cos. (A+B) = \cos. B$, und
$\sin. A \sin.(A+B+C) + \cos. A \cos.(A+B+C) = \cos. (B+C)$ u. s. f. (§. 309. IV. Zus. Trigon.)

8. Man addire beide Gleichungen Nr. 2 und 5 mit Rücksicht auf Nr. 6 und 7, so wird

9. $f^2 - 2ef \cos. F + e^2 = a^2 - 2ab \cos. B + b^2 + 2ac \cos. (B+C) - 2bc \cos. C + c^2 - 2ad \cos. (B+C+D) + 2bd \cos. (C+D) - 2cd \cos. D + d^2$, mithin

10. $\cos. F = [e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2a\,b\cos. B - 2a\,c\cos.(B+C) + 2a\,d\cos.(B+C+D) + 2b\,c\cos. C - 2b\,d\cos.(C+D) + 2c\,d\cos. D] : 2e\,f.$

I. Zusatz: Für das Dreyeck ABC (Fig. 4) wird

$$\cos. A = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a\,c}.$$

II. Zusatz: Bezeichnet man die Seiten mit den kleinern Buchstaben der ihnen entgegenstehenden Winkel, so wird

$$\cos. A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b\,c}$$ (§. 338. III. Zus. Trigon.)

§. 8.

Lehrsatz:

Man erhält das Quadrat einer Seite f jeder gebrochenen in sich zurückkehrenden Linie ABCDEFA (Fig. 1 — 3) wenn man zur Summe der Quadrate aller übrigen Seiten die doppelten Producte aller Paare dieser Seiten in den Cosinus der zwischen ihnen liegenden Winkel addirt, aber jene Producte, welche die Winkel in ungerader Anzahl enthalten, negativ setzet; das ist:

$$f^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2a\,b\cos. B + 2a\,c\cos.(B+C) - 2a\,d\cos.(B+C+D) + 2a\,e\cos.(B+C+D+E) - 2b\,c\cos. C + 2b\,d\cos.(C+D) - 2b\,e\cos.(C+D+E) - 2c\,d\cos. D + 2c\,e\cos.(D+E) - 2d\,e\cos. E.$$

Der

Der Beweis ist in der beygefügten Tabelle I. enthalten.

I. Zusatz: Für das Dreyeck ABC (Fig. 4) ist

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos. A.$

II. Zusatz: Bezeichnet man wieder die Seiten mit den kleinern Buchstaben ihrer opponirten Winkel, so ist

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos. A$ (§. 338. Lehrs. Nr. II. Trigon.)

III. Zusatz: Da die Formeln §. 5—8 immer den Halbmesser = 1 voraussetzen, so muß man bey Anwendung derselben von den Logarithmen trigonometrischer Linien, die man aus den Tabellen nimmt, die Zahl 10 abziehen (§. 315. V. Zusatz, Trigonom.), z. B. log. sin. $24°30' = 9{,}6177270 - 10$

IV. Zusatz: Will man umgekehrt aus dem gefundenen Werthe einer trigonometrischen Linie, z. B. tang. F §. 6, oder cos. F §. 7 vermittels Tabellen den entsprechenden Winkel angeben, so muß man die Charakteristik um 10 vermehren.

V. Zusatz: Aus eben diesen Gründen bleibt bey der dekadischen Ergänzung des Logarithmus einer trigonometrischen Linie am Ende — 10 weg. Denn z. B. für den Radius = 1 ist

log.

log. sin. 24°30′ = 9,6177270 — 10

mithin

c. dec. log. sin. 24°30′ = 10 — (9,6177270 — 10)

= 10 — 10

= 10 — 9,6177270

= 0,3822730

§. 9.

Aufgabe:

Eine Figur, von welcher alle Seiten und Winkel gegeben sind, in Grundriß zu legen (§. 180 e, Geom.)

Auflösung:

1. Man nehme eine beliebige von den gegebenen Seiten zur Abscissenlinie, und einen ihrer Endespuncte zum Anfangspuncte der Abscissen.

2. Aus §. 5 berechne man für alle Ecke, der Ordnung nach, die entsprechenden Abscissen und rechtwinklichten Ordinaten.

3. Nun ziehe man (Fig. 1) auf dem Papier eine gerade Linie als Abscissenlinie, und nehme den beliebigen Punkt A als ihren Anfangspunct.

4. Aus A trage man im verjüngten Maaße, der Ordnung nach, auf der einen Seite dieser Linie die positiven Abscissen At, As u. s. f., auf der andern die negativen Abscissen Am auf.

5. Durch m, t, s, u. s. f. errichte man Perpendikel, und verzeichne in eben dem verjüngten Maaße die Ordinaten Bm, Ct u. s. f.; sind einige derselben negativ, so werden sie auf der andern Seite der Abscissenlinie aufgetragen.

6. Nun verbinde man alle Endspuncte der Ordinaten A, B, C, D, E, F durch gerade Linien der Ordnung nach, so erhält man den verlangten Grundriß ABCDEFA.

Beweis:

Da durch alle Abscissen und Ordinaten die Figur vollkommen bestimmt ist, und diese Linien jenen der gegebenen Figur proportionirt in eben der Ordnung aufgetragen werden, so enthält ABCDEFA die nemliche Anzahl der Seiten, die nemlichen Winkel, und die ähnlich liegenden Seiten sind jenen der gegebenen Figur proportionirt, mithin ist die verzeichnete Figur der gegebenen ähnlich. (§. 91. Geom.)

§. 10.

Beyspiele zur vorhergehenden Aufgabe:

I. Beyspiel:

Von einem Sechsecke halten die Winkel

$A = 112° 16'$, $B = 107° 7'$, $C = 148° 21'$,

$D = 112° 22'$, $E = 162° 30'$, $F = 77° 24'$;

die

Die anliegenden Seiten der Ordnung nach

a = 114; b = 98,5; c = 55; d = 89; e = 100,85

f = 154.

Man soll davon einen Grundriß verzeichnen.

Auflösung:

1. Man ziehe eine gerade Linie, und nehme auf ihr im verjüngten Maaße AF = f (Fig. 1).

2. Nun berechne man für diese Abscissenlinie, und den Anfangspunct A die Ordinate und Abseisse, für die nächste Ecke B aus §. 5, so ist

3. die Ordinate = a sin. A; und die Abscisse = a cos. A.

4. Nun ist A = 112°16′, mithin sin. A = sin. 67°44′,

ferner log. a = 2,0569049

log. sin. A = 9,9663437 — 10 (§. 8. III. Zus.)

log. a sin. A = 2,0232486, mithin

5. Die entsprechende Ordinate = 105,5

6. cos. A = — cos. 67° 44′,

ferner log. a = 2,0569049

log. cos. A = 9,5785450 — 10

log. a cos. A = 1,6354499, mithin

7. die entsprechende Abscisse = 43,2 aber negativ, weil cos. A negativ ist; man nehme also

8. Auf der verlängerten Seite f die Linie Am = 43,2 im verjüngten Maaße, und erreichte auf ihr durch

m einen Perpendikel mB = 105,5 in eben dem Maaße, so ist die Lage des Punktes B im Grunderisse bestimmt (§. 4).

9. Eben so bestimme man wieder für die nächstfolgende Ecke C die Ordinate und Abscisse, es ist nemlich

erstere = a sin. A — b sin. (A + B)
letztere = a cos. A — b cos. (A + B)

10. A + B = 219° 23′, also

sin. (A + B) = — sin. 39°23;
cos. (A + B) = — cos. 39° 23′

11. log. b = 1,9934362
log. sin. (A+B) = 9,8024355 — 10
log. b sin (A+B) = 1,7958717, mithin
b sin. (A+B) = — 62,5, da wieder sin. (A+B) negativ ist,

12. folglich a sin. A — b sin. (A+B) = 105,5 + 62,5 = 168 (§. 38. Arithm.)

13. log. b = 1,9934362
log. cos. (A+B) = 9,8881335 — 10
log b cos. (A+B) = 1,8815697, also
b cos. (A+B) = — 76,1 wegen dem negativen Cosinus,

14. mithin a cos. A — b cos. (A + B) = — 43,2 + 76,1 = 32,9.

15. Man nehme also auf der Abscissenlinie At = 32,9 im verjüngten Maaße, durch t errichte man einen Perpendikel auf eben der Seite wie Nr. 8, weil die Ordinate ebenfalls positiv ist, nehme tC = 168 in eben dem Maaße, so ist die Lage von der Ecke C bestimmt.

16. Für die folgende Ecke D ist wieder

die Ordinate = a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)

die Abscisse = a cos. A — b cos. (A + B) + c cos. (A + B + C)

17. Ferner A + B + C) = 367° 44′, also

sin. (A + B + C) = sin. 7° 44′; cos. (A + B + C) = cos. 7° 44′

18. log. c = 1,7403627

log. sin. (A + B + C) = 9,1289247 — 10

log. c sin. (A + B + C) = 0,8692874, und

c sin. (A + B + C) = 7,4, folglich

19. a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C) = 168 + 7,4 (Nr. 12) = 175,4

20. log. c = 1,7403627

log. cos. (A + B + C) = 9,9960321 — 10

log. c cos. (A + B + C) = 1,7363948, und

c cos. (A + B + C) = 54,5, folglich

21. a cos A — b cos. (A + B) + c cos. (A + B + C) = 32,9 + 54,5 (Nr. 14) = 87,4.

Staatliche Bibliothek Regensburg

22. Man verzeichne also wieder die Abscisse As = 87,4, errichte durch s die rechtwinklichte Ordinate sD = 175,4, so ist die Lage der Ecke D bestimmt.

23. Für die Ecke E ist

die Ordinate = a sin. A — b sin. (A + B)
+ c sin. (A+B+C) — d sin. (A+B+C+D)

die Abscisse = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A+B+C) — d cos. (A+B+C+D)

24. Ferner A + B + C + D = 480° 6′, mithin
sin. (A+B+C+D) = sin. 59° 54′, und
cos. (A+B+C+D) = — cos. 59° 54′.

25.

log. d = 1,9493900
log. sin. (A+B+C+D) = 9,9370921 — 10
log. d sin. (A+B+C+D) = 1,8864821, also
d sin. (A+B+C+D) = 77, folglich

26. a sin. A — b (A + B) + c sin. (A+B+C)
— d sin. (A + B + C + D) = 175,4
— 77 (Nr. 19) = 98,4

27.

log. d = 1,9493900
log. cos. (A+B+C+D) = 9,7002802 — 10
log. d cos. (A+B+C+D) = 1,6496702, also
d cos. (A+B+C+D) = — 44,6, folglich

28. a cos. A — b cos. (A+B) + c cos. (A+B+C)
— d cos. (A + B + C + D) = 87,4
+ 44,6 (Nr. 21) = 132.

Staatsbibliothek
zu Berlin

29. Man verzeichne daher die Abscisse Ar = 132, errichte durch r die Ordinate rE = 98,4, so ist auch die Ecke E ihrer Lage nach bestimmt.

30. Endlich ziehe man der Ordnung nach die Linien AB, BC, CD, DE, EF, so schließen sie mit AF den verlangten Grundriß ein.

§. 11.

II. Beyspiel:

Wenn A = 54°47′; B = 97°49′; C = 259°20′;
D = 94°7′; E = 147°19′; F = 66°38′;
Die Seiten a = 164; b = 85,6; c = 110,5;
d = 77; e = 151; f = 362,5 gegeben sind, solche in Grundriß zu legen.

Auflösung:

1. Für die Seite AF = f als Abscissenlinie, und den Anfangspunkt A berechne man für alle Ecke; der Ordnung nach die Ordinaten und Abscissen; so ist (Fig. 2)

2. a sin. A = 134 = Bm; a cos. A = 94,6 = Am

3. A + B = 152°36′; also
sin. (A + B) = 27°24′; cos. (A + B) = − cos. 27°24′; und
b sin. (A+B) = 39,4; b cos. (A + B) = − 76;
mithin
a sin A − b sin. (A + B) = 94,6 = Ct
a cos. A − b cos. (A + B) = 170,6 = At.

4. A + B + C = 411°56′, mithin

sin. (A+B+C) = sin. 51°56′; cos. (A+B+C)
= cos. 51°56′;

c sin. (A + B + C) = 87; c cos. (A + B + C)
= 68,1; alſo

a sin. A — b sin. (A+B) + c sin. (A+B+C)
= 181,6 = Ds

a cos. A — b cos. (A+B) + c cos. (A+B+C)
= 238,7 = As

5. A + B + C + D = 506°3′; alſo

sin. (A + B + C + D) = sin. 33°57,
cos. (A+B+C+D) = — cos. 33°57′

d sin. (A+B+C+D) = 43; d cos. (A+B+C+D)
= — 63,9; folglich

a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A+B+C)
— d sin. (A + B + C + D) = 138,6 = Er,

a cos. A — b cos. (A + B) + c cos. (A+B+C)
— d cos. (A + B + C + D) = 302,6 = Ar.

6. Man trage alſo im verjüngten Maaße die Seite f als Abſciſſenlinie, und aus A auf ihr die gefundenen Abſciſſen auf, errichte Perpendikel, und nehme auf ihnen die gefundenen Ordinaten, und verbinde die Endespuncte derſelben durch gerade Linien, ſo erhält man den verlangten Grundriß.

§. 12.

Aufgabe:

Eine gebrochene Linie (Fig. 3), von welcher alle Winkel und Seiten gegeben ſind, in Grundriß zu legen.

Auflösung:

1. Man ziehe durch ihren Anfangspunct A eine gerade Linie AF unter einem beliebigen, aber bekannten Winkel A;

2. Nun berechne man für den Anfangspunct A, und der Abscissenlinie AF, für alle Ecke der Ordnung nach die entsprechenden Abscissen und Ordinaten;

3. Trage sie im verjüngten Maaße auf, und bestimme aus der Beschaffenheit der Zeichen + oder — ihre Lage;

4. Verbinde endlich der Ordnung nach alle Endespuncte der Ordinaten durch gerade Linien, so erhält man den verlangten Grundriß.

§. 13.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Es sey von der gebrochenen Linie ABCDEF (Fig. 3)

$B = 43°11'$; $C = 320{,}8'$; $D = 34°11'$;

$E = 299°13'$

$a = 92$, $b = 182$, $c = 242$, $d = 290$, $e = 164$.

Ferner sey die Lage der Linie AF so gegeben, oder willkürlich bestimmt worden, daß $A = 71°1'$.

Man soll davon einen Grundriß verzeichnen.

Auflösung:

1. Man nehme AF zur Abscissenlinie, und A als ihren Anfangspunct, so ist

2. a sin. A = 87 = Bm;
a cos. A = 30 = Am;
Man trage also

3. letztere im verjüngten Maaße auf der Abscissenlinie vom Punkte A aus, auf, errichte durch m einen Perpendikel, und nehme solchen im verjüngten Maaße = Bm, so ist die Lage der Ecke B bestimmt.

4. A + B = 114°12′, also
sin. (A + B) = sin. 65°48′; cos. (A + B)
= — cos. 65°48′
b sin. (A+B) = 166; b cos. (A+B) = — 74,6,
mithin
a sin. A — b sin. (A+B) = 87 — 166 = — 79 = Ct
a cos. A — bcos. (A+B) = 30 + 74,6 = 104,6 = At.

5. Man nehme wieder aus A im verjüngten Maaße die Abscisse = At, und errichte durch t einen Perpendikel, da nun die Ordinate negativ gefunden wurde, so nehme man in einer Richtung, welche jener von Bm entgegengesetzet ist, d. i., im gegenwärtigen Beyspiele auf der unteren Seite der Abscissenlinie, die Ordinate = Ct.

6. A + B + C = 434°20′, also
sin. (A+B+C) = sin. 74°20′; cos. (A+B+C)
= cos. 74°20′
c sin. (A + B + C) = 233; c cos. (A + B + C)
= 65,35, folglich

a sin.

a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)
= — 79 + 233 = 154 = Ds

a cos. A — b cos. (A + B) + c cos. (A + B + C)
= 104,6 + 65,3 = 169,9 = As

7. Man trage wieder beyde Linien, und zwar die Ordinate auf der obern Seite im verjüngten Maaße auf, so ist die Lage von D bestimmt.

8. A + B + C + D = 468°31′, also

sin. (A + B + C + D) = sin. 71°29′;
cos. (A + B + C + D) = — cos. 71°29′

d sin. (A + B + C + D) = 275; d cos (A + B + C + D)
= — 92,1, folglich

a sin. A — b sin. (A + B) + c sin. (A + B + C)
— d sin. (A + B + C + D) = 154 — 275
= — 121 = Er

a cos. A — b cos. (A + B) + c cos. (A + B + C)
— d cos. (A + B + C + D) = 169,9 + 92,1
= 262 = Ar

10. Man verzeichne beyde Linien im verjüngten Maaße, und zwar die Ordinate auf der untern Seite der Abscissenlinie, so ist die Lage von E bestimmt.

10. A + B + C + D + E = 767°44′, also

sin. (A + B + C + D + E) = sin. 47°44′;
cos. (A + B + C + D + E) = cos. 47°44′

e sin. (A + B + C + D + E) = 121,37
e cos. (A + B + C + D + E) = 110,3, folglich

$$a \sin. A - b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) - d \sin. (A+B+C+D) + e \sin. (A+B+C+D+E) = -121 + 121{,}37 = 0{,}37$$

oder vielmehr = o, da dieser Unterschied von der Natur der gegebenen Winkel und Seiten, von welchen letztere nur bis auf Zolle, und erstere bis auf Minuten bestimmt sind, und von den Logarithmen herkömmt.

$$a \cos. A - b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C) - d \cos. (A+B+C+D) + e \cos. (A+B+C+D+E) = 262 + 110{,}3 = 372{,}3 = AF.$$

11. Man trage von A aus letztere Abscisse im verjüngten Maaße auf, oder nehme AF, so stoßen die gebrochene Linie und die gewählte Abscissenlinie im gegenwärtigen Beyspiele bey F zusammen, weil die Ordinate für F = o ist.

12. Zieht man durch die Endespuncte aller verzeichneten Ordinaten, wie sie aufeinander folgen, die geraden Linien AB, BC, CD, DE, EF, so ist der verlangte Grundriß verzeichnet.

II. Hauptstück.

Bestimmung der Seiten, und Winkel geradlinigter Figuren.

§. 14.

Darstellung aller möglichen Aufgaben.

Da eine geradlinigte Figur von n Seiten, eben so viele Ecke (§. 15. II. Zus. Geometrie), also 2n Stücke hat, von welcheu 2n — 3 gegeben seyn müssen, wenn die übrigen 3 unbekannten Stücke, welche aber nicht lauter Seiten seyn dürfen, daraus bestimmt werden sollen, so können die 3 unbekannten Stücke, die man aus den übrigen gegebenen Stücken zu berechnen suchet

I. entweder zwey Seiten mit einem Winkel, oder
II. eine Seite und zwey Winkel, oder aber
III. drey Winkel seyn.

I. Abschnitt.

Bestimmung zweyer Seiten, und eines Winkels.

§. 15.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur alle Winkel bis auf einen gegeben sind, solchen durch Rechnung zu finden.

Auflösung:

1. Wenn die Figur n Seiten, mithin auch n Winkel hat, so ist

2. Die Summe aller innern Winkel $S = 2R\,(n-2)$ (§. 56, Geometrie).

3. Bezeichnet nun f die Summe aller gegebenen, und w den unbekannten Winkel, so ist

4. $S = f + w = 2R\,(n-2)$, mithin

5. $w = S - f = 2R\,(n-2) - f$

Beyspiel:

Im Sechsecke ABCDEFA (Fig. 1) sey $A = 112°16'$;

$B = 107°7'$, $C = 148°21$; $D = 112°22'$;

$E = 162°30'$ gegeben.

Man soll daraus den Winkel F suchen.

Auflösung:

Da die gegebene Figur ein Sechseck, mithin

$$S = 2R\ (6-2) = 8R = 8 \times 90^\circ = 720^\circ;$$

und

$$A + B + C + D + E = 642^\circ 36' = f;$$ so ist

$$F = 720^\circ - 642^\circ 36' = 77^\circ 24'$$

I. Zusatz: Da in jedem Dreyecke ABC (Fig. 4)

$$A + B + C = 2R,$$

so ist sin. A = sin. (B + C) (§. 292. 1. Zus. Trigonometrie), und

(cos. A =) — cos. (B + C) (§. 294. Zus. und 296. IV. Zus. Trigonometrie).

II. Zusatz: In jedem Vierecke ist die Summe der innern Winkel $= 4R$, mithin hat jeder Winkel mit der Summe der übrigen einen gleichen, aber entgegen gesetzten Sinus; denn wenn der Winkel spitzig ist, wie z. B. (Fig. 5) der Winkel B, so ist

sin. B = — sin. (A + B + C) (§. 292. IV. und IX. Zus. Trigonometrie); ist hingegen der Winkel z. B. A stumpf, so sey sein Supplement $= x$, und jenes von A + B + C aber $= y$, mithin

$$A + x = 2R;$$ ferner

$$B + C + D - y = 2R;$$ also

$$A + x + B + C + D - y = 4R$$

$$= (A + B + C + D),$$ also

$$x - y = 0,$$ und $x = y$, folglich

hat

hat der ſtumpfe Winkel A mit der Summe der 3 übrigen gleiches Supplement, alſo gleichen, aber entgegengeſetztem Sinus, oder

$$\text{ſin. } A = -\text{ ſin. } (B + C + D);$$

Wenn endlich der Winkel A (Fig. 6) erhaben iſt, ſo hat er ebenfalls mit der Summe der 3 übrigen, die zuſammen einem hohlen gleich ſind, gleiches Supplement, folglich iſt wieder

$$\text{ſin. } A = -\text{ ſin. } (B + C + D).$$

III. Zuſatz: Aus eben den angeführten Gründen hat jeder Winkel im Vierecke mit der Summe der 3 übrigen einerley Coſinus, d. i. cos. A = cos. (B + C + D) (§. 294. Zuſ. und §. 296. IV. Zuſ. Trigon.)

IV. Zuſatz: Wenn das Viereck ein Trapez, ſo daß AD ∥ BC iſt, ſo wird $A + B = 2R = C + D$ (§. 45. I. Geometrie), mithin ſin. $(A + B)$ = ſin. $(C + D) = 0$, und cos. $(A + B)$ = cos. $(C + D) = -1$ ferner ſin. A = ſin. B, und cos. A = — cos. B.

V. Zuſatz: Wenn im Trapeze zwey Winkel A, D die an der nemlichen Parallele anliegen, gegeben ſind, ſo ſind auch die beyden andern B, C bekannt; denn $A + B = 2R = C + D$.

§. 16.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur z. B. im Sechsecke ABCDEFA (Fig. 1) alle Winkel, auſſer

einem

einem, z. B. E, und alle Seiten auſſer zwey AF, EF, welche unmittelbar aufeinander folgen, gegeben ſind, die beyden Seiten, nebſt dem unbekannten Winkel zu ſuchen.

Auflöſung:

1. Man beſtimme den Winkel aus §. 15, ſo iſt im gegebenen Falle $E = 2R - (6 - 2) - (A + B + C + D + F)$.

2. Man nehme die eine unbekannte Seite im gegebenen Falle $AF = f$ zur Abſciſſenlinie, und A zu ihren Anfangspunct.

3. Nun beſtimme man aus §. 5. Lehrſ. Nr. I. die Ordinate für die Ecke F, das iſt:

$$a \sin. A - b \sin. (A + B) + c \sin. (A + B + C) - d \sin. (A + B + C + D) + e \sin. (A + B + C + D + E) = o,$$ ſo wird

$$e = [-a \sin. A + b \sin. (A + B) - c \sin. (A + B + C) + d \sin. (A + B + C + D)] : \sin. (A + B + C + D + E).$$

Durch dieſe Gleichung iſt nun die eine Seite EF oder e beſtimmt.

4. Ferner ſuche man für die nemliche Abſciſſenlinie AF und Anfangspunct A die Abſciſſe der vorhergehenden Ecke F, ſo iſt aus §. 5. Lehrſ. Nr. II.

$$f = a \cos. A - b \cos. (A + B) + c \cos. (A + B + C) - d \cos. (A + B + C + D) +$$

+ e cos. (A + B + C + D + E), aus welcher Gleichung, da alles auſſer f gegeben iſt, letzteres ſich berechnen läßt.

I. Zuſatz: Nimmt man die nemliche Seite AF zur Abſciſſenlinie, aber F für ihren Anfangspunct, und beſtimmt für die Ecke A die Ordinate, ſo iſt

e sin. F — d sin. (F + E) + c sin. (F + E + D)
— b sin. (F + E + D + C)
+ a sin. (F + E + D + C + B) = 0
(§. 5. II. Zuſ.), alſo

e = [d sin. (F + E) — c sin. (F + E + D)
+ b sin. (F + E + D + C)
— a sin. (F + E + D + C + D)] : sin. F,

woraus ebenfalls die eine unbekannte Seite e gefunden wird.

Für eben die Ecke A wird die entſprechende Abſciſſe:

f = e cos. F — d cos. (F+E) + c cos. (F+E+D)
— b cos. (F + E + D + C)
+ a cos. (F + E + D + C + B) (§. 5. V. Zuſ.), aus welcher Gleichung man die andere unbekannte Seite f berechnen kann.

II. Zuſatz: Sind hingegen BC = b, und CD = c die unbekannten Seiten, ſo wird auf die nemliche Art, wenn man b zur Abſciſſenlinie, und B zum Anfangspunct wählet:

c = [— a sin. B + f sin. (B + A) — e sin. (B + A + F)
+ d sin. (B + A + F + E)]:

$$\text{fin. } (B + A + F + E + D)$$

$$b = a \cos. B - f \cos. (B + A) + e \cos. (B + A + F)$$
$$\mp d \cos. (B + A + F + E)$$
$$+ c \cos. (B + A + F + E + D).$$

Wählet man aber für die Abscissenlinie b die Ecke C als Anfangspunct, so ist

$$c = [d \text{ fin. } (C + D) - e \text{ fin. } (C + D + E)$$
$$+ f \text{ fin. } (C + D + E + F)$$
$$- a \text{ fin. } (C + D + E + F + A)] : \text{fin. } C; \text{ und}$$

$$b = c \cos. C - d \cos. (C + D) + e \cos. (C + D + E)$$
$$- f \cos. (C + D + E + F)$$
$$+ a \cos. (C + D + E + F + A).$$

III. Zusatz: Die gegebene Auflösung, nebst den beyden beyden vorhergehenden Zusätzen lassen sich leicht auf Figuren von mehr oder weniger als 6 Seiten anwenden.

§. 17.

Beyspiele zur Uebung.

I. Beyspiel: Im Sechsecke (Fig. 1) sey

$$A = 112°16'; \quad B = 107°7'; \quad D = 112\ 22',$$
$$E = 162°30'; \quad F = 77°24'.$$

Ferner $a = 114$; $b = 98{,}5$; $c = 55$; $d = 89$.

Man soll den Winkel C, und die zwey letzten Seiten e und f suchen.

I. Auflösung:

1. $A + B + D + E + F = f = 571°39'$,

ferner

ferner $S = 2R\,(6+2) = 8R = 720°$, also der gesuchte Winkel $C = S - f = 148°21'$.

2. Man nehme die letzte unbekannte Seite f zur Abscissenlinie, und A als Anfangspunct, so ist

$$e = [-a \sin. A + b \sin.(A+B) - c \sin.(A+B+C) + d \sin.(A+B+C+D)] : \sin.(B+B+C+D+E)$$

(§. 16. Aufg. (Nr. 3).

3. Nun ist aus §. 10

$-a \sin. A$	$= +$	$- 105{,}5$
$+b \sin.(A+B)$	$= +$	$- 62{,}5$
$-c \sin.(A+B+C)$	$= +$	$- 7{,}4$
$+d \sin.(A+B+C+D)$	$= +$	77 :
mithin der Zähler Nr. 2	$=$	$77 - 175{,}4$
	$=$	$- 98{,}4$; folglich

$$4.\quad e = \frac{-98{,}4}{\sin.(A+B+C+D+E)}$$

5. $A+B+C+D+E = 642°36'$; mithin $\sin.(A+B+C+D+E) = -\sin. 77°24'$ und $\cos.(A+B+C+D+E) = +\cos. 77°24'$, folglich

$$5.\quad e = \frac{-98{,}4}{-\sin. 77°24'} = \frac{98{,}4}{\sin. 77°24'}$$

6. Nun ist $\log. 98{,}4 = 1{,}9929951$,

$\log. \sin. 77°24' = 9{,}9894128 - 10$

$\log.(98{,}4 : \sin. 77°24') = 2{,}0035823$,

$= \log. e$, folglich

7.

7. Die eine gesuchte Seite e = 100,85.

8. Ferner ist

f = a cos. A — b cos. (A+B) + b cos. (A+B+C)
— d cos. (A + B + C + D)
+ e cos. (A + B + C + D + E) (§. 16. Aufg. Nr. 6).

10. Nun ist log. e = 2,0035823 (Nr. 6)
log. cos.(A+B+C+D+E) = 9,3387418 — 10 (Nr. 5), also
log. e cos.(A+B+C+D+E) = 1,3423241, mithin
e cos. (A + B + C + D) = 22, aus diesen und §. 10 ist also

11. a cos. A = + ... — 43,2
— b cos. (A+B) = + 76,1
+ c cos. (A+B+C) = + 54,5
— d cos. (A+B+C+D) = + 44,6
+ e cos. (A+B+C+D+E) = + 22; folglich

f = 197,2 — 43,2
= 154.

II. Auflösung:

12. Behält man zwar f zur Abscissenlinie, nimmt aber F als ihren Anfangspunct, so ist

13. e = [d sin. (F + E) — c sin. (F + E + D)
+ b sin. (F + E + D + C)
— a sin. (F + E + D + C + B)] : sin. F
(§. 16. I. Zus.)

14. Ferner

$$f = e \cos. F - d \cos.(F+E) + c \cos. (F+E+D) - b \cos. (F+E+D+C) + a \cos. (F+E+D+C+B).$$

15. Nun ist $F+E = 239°54'$, mithin

$\sin. (F+E) = -\sin. 59°54'$; und $\cos. (F+E) = -\cos. 59°54'$;

also $d \sin. (F+E) = -77$; und

$d \cos. (F+E) = -44{,}65$.

16. $F+E+D = 352°16'$, mithin

$\sin. (F+E+D) = -\sin. 7°44'$;

$\cos. (F+E+D) = \cos. 7°44'$, also

$c \sin. (F+E+D) = -7{,}4$; $c \cos. (F+E+D) = 54{,}5$

17. $F+E+D+C = 500°37'$, mithin

$\sin. (F+E+D+C) = \sin. 39°23'$

$\cos. (F+E+D+C) = -\cos. 39°23'$, folglich

$b \sin. (F+E+D+C) = 62{,}5$

$b \cos. (F+E+D+C) = -76{,}1$

18. $F+E+D+C+B = 607°44'$, also

$\sin. (F+E+D+C+B) = -\sin. 67°44'$.

$\cos. (F+E+D+C+B) = -\cos. 67°44'$.

und

$a \sin. (F+E+D+C+B) = -105{,}5$

$a \cos. (F+E+D+C+B) = -43{,}2$.

mithin

19. d sin. (F+E) = + ... −77
− c sin. (F+E+D) = + 7,4
+ b sin. (F+E+D+C) = + 62,5
− a sin. (F+E+D+C+B) = + 105,5

Mithin der Dividend Nr. 13 = 175,4 − 77 = 98,4

und

20. $e = \frac{98,4}{\text{sin. F}} = 100,8$ die eine unbekannte Seite.

21. Ferner ist e cos. F = + 22
− d cos. (F+E) = + 44,6
+ c cos. (F+E+D) = + 54,5
− b cos. (F+E+D+C) = + 76,1
+ a cos. (F+E+D+C+B) = + ... − 43,2

Folglich die andere Seite f = 197,2 − 43,2 (Nr. 14)
= 154.

II. Beyspiel:

Im Vierecke (Fig. 5) sey B = 62°14′30″;
C = 97°35′30″; D = 87°; ferner die Seite
AB = a = 274,2; AD = d = 273.

Man sucht den Winkel A, und die beyden Seiten
BC = b, und CD = c.

Auflösung:

1. B + C + D = f = 246°50′, und
S = 4R = 360°, mithin
A = S − f = 113°10′.

2. Man nehme nun die eine unbekannte Seite b zur Abscissenlinie, und B zum Anfangspuncte derselben, bestimme für die C die Ordinate und Abscisse, so ist

3. erstere: $a \sin. B - d \sin. (B + A) + c \sin. (B + A + D) = o$, mithin

4. $$c = \frac{- a \sin. B + d \sin. (B + A)}{\sin. (B + A + D)}$$

5. letztere, oder die Abscisse für die Ecke C:

$$b = a \cos. B - d \cos. (B + A) + c \cos. (B + A + D).$$

6. Nun ist

$$\log. a = 2{,}4380675;$$

$$\log. \sin. B = 9{,}9469039 - 10;$$

$$\log. a \sin. B = 2{,}3849714$$

$$a \sin. B = 242{,}6$$

$$\log. a = 2{,}4380675$$

$$\log. \cos. B = 9{,}6681465 - 10$$

$$\log. a \cos. B = 2{,}1062140$$

$$a \cos. B = 127{,}7$$

7. $B + A = 175^\circ 24' 30''$, mithin

$$\sin. (B + A) = \sin. 4^\circ 35' 30''; \cos. (B + A) = - \cos. 4^\circ 35' 30''$$

$$\log. d = 2{,}4361626$$

$$\log. \sin. (B + A) = 8{,}9033828 - 10$$

$$\log. d \sin. (B + A) = 1{,}3395454$$

$$d \sin. (B + A) = 21{,}9$$

8. Ferner log. d = 2,4361626
log. cos. (B+A) = 9,9986039 — 10
log. d cos. (B+A) = 2,4347665
d cos. (B+A) = — 272,1

9. B+A+D = 262°24′30″, mithin
sin. (B+A+D) = — sin. 82°24′30″ = — sin C
(§. 15. II. Zuſ.)
cos. (B+A+D) = — cos. 82°24′30″ = cos. C
(§. 15. III. Zuſ.)

10. Nun iſt
— a sin. B + d sin. (B+A) = — 242,6 + 21,9
= — 220,7; mithin

11. $c = \frac{-220,7}{-\sin. C}$ (Nr. 4) $= \frac{220,7}{\sin. C}$

12. log. 220,7 = 2,3438023
log. sin. C = 9,9961765 — 10; alſo
log. c = 2,3476258, folglich
die eine Seite CD = c = 222,7

13. log. c = 2,3476258
log. cos. C = 9,1209427 — 10
log. c cos. C = 1,4685685
c cos. C = — 29,4, folglich

14. a cos. B = + 127,7
— d cos. (B+A) = + 272,1
+ c cos. (B+A+D) = + ... — 29,4; das iſt
die andere Seite BC = b = 399,8 — 29,4 (Nr. 5)
= 370,4.

§. 18.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur z. B. (Fig. 1) alle Winkel auſſer C, und alle Seiten auſſer $CD = c$, und $AF = f$, welche nicht unmittelbar aufeinander folgen, gegeben ſind, ſowohl den Winkel C, als die beyden Seiten c, f zu ſuchen.

Auflöſung:

1. Man beſtimme den Winkel C aus §. 15.

2. Von den beyden unbekannten Seiten nehme man die eine zur Abſciſſenlinie, und beſtimme für eine der beyden Ecke, welche an der andern unbekannten anliegen, die doppelte Gleichung ihrer Ordinate, ſo iſt

3. Für die Abſciſſenlinie f und die Ecke C
$Ct = a \sin A - b \sin.(A+B)$ (§. 5. Lehrſ. I.),
$Ct = e \sin. F - d \sin.(F+E) + c \sin.(F+E+D)$
(§. 5. II. Zuſ.), mithin

4. $e \sin. F - d \sin.(F+E) + c \sin.(F+E+D) = a \sin. A - b \sin.(A+B)$, folglich

5. $$c = \frac{a \sin.A - b \sin.(A+B) - e \sin.F + d \sin.(F+E)}{\sin.(F+E+D)};$$

woraus ſich alſo die eine unbekannte Seite c berechnen läßt.

6. Endlich beſtimme man für die an der Abſciſſenlinie anliegende andere Ecke F die Abſciſſe, ſo iſt

7. $f = a\cos.A - b\cos.(A+B) + c\cos.(A+B+C) - d\cos.(A+B+C+D) + e\cos.(A+B+C+D+E)$ (§. 5. Lehrs. II.), woraus sich die zweyte unbekannte Seite berechnen läßt.

§. 19.

Beyspiel:

Im Sechsecke (Fig. 2) sey

$A = 54°47'$; $B = 97°49'$; $D = 94°7'$;

$E = 147°19'$; $F = 66°38'$.

Ferner $a = 164$; $b = 85.6$; $d = 77$; $e = 151$.

Man soll den Winkel C und die beyden Seiten $CD = c$, und $AF = f$ suchen.

Auflösung:

1. $A+B+D+E+F = f = 460°40'$

$S = 8R = 720°$, mithin

der Winkel $C = S - f = 259°20'$.

2. Man nehme die Seite f zur Abscissenlinie, und bestimme für die an der andern unbekannten Seite c anliegende Ecke C die beyden Gleichungen der entsprechenden Ordinate, so erhält man

3. $$c = \frac{a\sin.A - b\sin.(A+B) - e\sin.F + d\sin.(F+E)}{\sin.(F+E+D)}$$

(§. 18. Nr. 5).

4. Nun ist a sin. A = + 134
— b sin. (A+B) = + ... — 39,4
— e sin. F = + ... — 138,6
+ d sin. (F+E) = + ... — 43

Mithin der Zähler = + 134 — 221,0 = — 87.

5. Ferner F + E + D = 308°4′, mithin
sin. (F+E+D) = — sin. 51°56′, folglich

$$6.\quad c = \frac{-87}{-\sin. 51°56'} = \frac{87}{\sin. 51°56'} = 110{,}5,$$

die eine unbekannte Seite.

7. Endlich ist für die Ecke F die entsprechende Abscisse, oder

f = a cos. A — b cos. (A+B) + c cos. (A+B+C)
— d cos. (A + B + C + D)
— e cos. (A+B+C+D+E) (§. 18. Nr. 7).

8. Nun ist a cos. A = + 94,6
— b cos. (A+B) = + 76
+ c cos. (A+B+C) = + 68,1
— d cos. (A+B+C+D) = + 63,9
+ e cos. (A+B+C+D+E) = + 59,9, folglich

die gesuchte andere Seite f = 362,5.

Man vergleiche oben §. 11.

II. Abschnitt.

Bestimmung einer Seite, und zweyer Winkel.

§. 20.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur (Fig. 7) alle Seiten ausser FG, und alle Winkel ausser F, G, welche an dieser Seite anliegen, gegeben sind, diese Seite nebst den beyden Winkeln zu berechnen.

I. Auflösung:

1. Man nehme die an der unbekannten Seite anliegende GA zur Abscissenlinie, und A als den Anfangspunct, so ist nach §. 6

2. $$\text{tang. } G = [a \text{ sin. } A - b \text{ sin. } (A+B) + c \text{ sin. } (A+B+C) - d \text{ sin. } (A+B+C+D) + e \text{ sin. } (A+B+C+D+E)] : [g - a \text{ cos. } A + b \text{ cos. } (A+B) - c \text{ cos. } (A+B+C) + d \text{ cos. } (A+B+C+D) - e \text{ cos. } (A+B+C+D+E)].$$

3. Um den entsprechenden Winkel G dieser Tangens zu finden, muß man die nöthige Rücksicht auf das Zeichen derselben haben; ist sie nemlich positiv, so ist der Winkel entweder spitzig, oder erhaben, aber kleiner, als 270°; ist sie hingegen negativ, so ist der Winkel entweder stumpf, oder erhaben, aber größer als 270° (§. 301. III. Zus.

Trigo-

Trigonom.); es muß daher schon anderswoher bekannt seyn, ob G hohl, oder erhaben ist.

4. Nun läßt sich auch der andere Winkel F aus §. 15 angeben.

5. Bestimmt man endlich für die Ecke G die entsprechende Abscisse, so ist aus §. 5. Nr. II.

$$g = a\cos.A - b\cos.(A+B) + c\cos.(A+B+C) - d\cos.(A+B+C+D) + e\cos.(A+B+C+D+E) - f\cos.(A+B+C+D+E+F),$$ mithin

6. $$f = [a\cos.A - b\cos.(A+B) + c\cos.(A+B+C) - d\cos.(A+B+C+D) + e\cos.(A+B+C+D+E) - g]:\cos.(A+B+C+D+E+F).$$

Das ist: man nehme die entgegengesetzte Größe des Nenners, oder Divisors Nr. 2, im Falle die Anzahl der Seiten ungerade ist, ausser diesem den Nenner selbst, und dividire sie durch Cosinus von der Summe aller Winkel ausser G, so giebt

7. der Quotient die gesuchte Seite f.

II. Auflösung:

8. Aus §. 8 läßt sich die Seite f unmittelbar berechnen, ohne erst die beyden Winkel F, G zu suchen, es ist nemlich:

$$f^2 = g^2 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - 2ga\cos.A + 2gb\cos.(A+B) - 2gc\cos.(A+B+C)$$

+

$$+ 2gd \cos.(A + B + C + D)$$
$$- 2ge \cos.(A + B + C + D + E)$$
$$- 2ab \cos. B + 2ac \cos.(B + C)$$
$$- 2ad \cos.(B + C + D)$$
$$+ 2ae \cos.(B + C + D + E)$$
$$- 2bc \cos. C + 2bd \cos.(C + D)$$
$$- 2be \cos.(C + D + E)$$
$$- 2cd \cos. D + 2ce \cos.(D + E)$$
$$- 2de \cos. E.$$

9. Aus der gefundenen Seite f nebst den gegebenen Stücken wird vermöge §. 7

$$\cos. F = [e^2 + f^2 - g^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2$$
$$+ 2ga \cos. A - 2gb \cos.(A + B)$$
$$+ 2gc \cos.(A + B + C)$$
$$- 2gd \cos.(A + B + C + D)$$
$$+ 2ab \cos. B - 2ac \cos.(B + C)$$
$$+ 2ad \cos.(B + C + D)$$
$$+ 2bc \cos. C - 2bd \cos.(C + D)$$
$$+ 2cd \cos. C] : 2ef$$

10. Um aus dem gefundenen Cosinus den entsprechenden Winkel F anzugeben, muß man Rücksicht auf das Zeichen nehmen, ist solches positiv, so ist der Winkel F entweder spitzig, oder erhaben, aber größer als 270°, ist hingegen das Zeichen negativ, so ist der Winkel entweder stumpf, oder erhaben, aber kleiner als 270° (§. 296. IV. Zus. Trigonom.); es muß daher

11. anderswoher bekannt seyn, ob der gesuchte Winkel F hohl oder erhaben ist.

12. Nun wird wieder der andere Winkel G aus §. 15 bestimmt.

Zusatz: Wenn Nr. 3 die Natur des Winkels G noch nicht bekannt ist, so nehme man solchen nach Belieben etwas hohl oder erhaben, bestimme nach dieser Annahme F, und endlich f Nr. 6; giebt letztere Gleichung den Werth für f positiv, so ist der für G angenommene Werth der wahre, wird aber f negativ gefunden, so ist obiger Werth des Winkels falsch, da eine Seite nie negativ seyn kann.

§. 21.

Beyspiel:

Im Siebenecke. (Fig. 7) sey $A = 113°23'$;
$B = 84°44'$; $C = 270°31'$; $D = 105°55'$;
$E = 91°37'$.

Ferner die Seite $AB = a = 361$; $b = 383$;
$c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $g = 531$;
gegeben.

Man soll die Seite $FG = f$, und die beyden anliegenden Winkel F, G suchen.

1. Auflösung:

1. $A = 113°23'$, mithin sin. $A =$ sin. $66°37'$, und
cos. $A = -$ cos. $66°37'$;

2. $A+B = 198°7'$; also $\sin.(A+B) = -\sin. 18°7'$; und $\cos.(A+B) = -\cos. 18°7'$.

3. $A+B+C = 468°38'$; folglich $\sin.(A+B+C) = \sin. 71°22'$, und $\cos.(A+B+C) = -\cos. 71°21'$

4. $A+B+C+D = 574°33'$, mithin $\sin.(A+B+C+D) = -\sin. 34°33'$; $\cos.(A+B+C+D) = -\cos. 34°33'$.

5. $A+B+C+D+E = 666°10'$, also $\sin.(A+B+C+D+E) = -\sin. 53°50'$, und $\cos.(A+B+C+D+E) = +\cos. 53°50'$.

6. Nun bestimme man nach §. 20. Nr. 2 die Werthe für den Zähler und Nenner, das ist

7.

$a \sin. A$	$=$	331,351
$-b \sin.(A+B)$	$=$	119,095
$+c \sin.(A+B+C)$	$=$	291,855
$-d \sin.(A+B+C+D)$	$=$	226,850
$+e \sin.(A+B+C+D+E)$	$=$	..... $-$ 483,575
mithin der Zähler	$=$	969,151 $-$ 483,575
	$=$	485,576

8. Eben so wird

g	$=$	531
$-a \cos. A$	$=$	143,274
$+b \cos.(A+B)$	$=$	..... $-$ 364,013
$-c \cos.(A+B+C)$	$=$	98,409
$+d \cos.(A+B+C+D)$	$=$	..... $-$ 329,453
$-e \cos.(A+B+C+D+E)$	$=$	..... $-$ 353,492
Mithin der Nenner	$=$	772,683 $-$ 1046,958
	$=$	$-274,275$; folglich

9.

9. $\text{tang. } G = \frac{485{,}576}{-274{,}275} \; r$ (§. 8. IV. Zus.),

wenn r den Halbmesser der Tabellen bezeichnet.

10. $\log. 485{,}576 \cdot r = 12{,}6862571$

$\log. 274{,}275 = 2{,}4381862$

mithin $\log. \text{tang. } G = 10{,}2480709$

$= \text{tang. } 60°32'25''$.

11. Nun ist aber die Tangens G negativ (Nr. 9), mithin G entweder stumpf, also 119°27′35″, oder aber erhaben, und zwar größer als 270°, mithin 299°27′35″ (§. 20. Nr. 3).

12. Bey einem Siebenecke ist aber

$A + B + C + D + E + F + G = S = 2R. 5 = 900°$,

also

$F + G = 900° - (A + B + C + D + E)$

$= 900° - 666°10'$ (Nr. 5) $= 233°50'$,

mithin kann der Winkel G nicht erhaben, sondern muß hohl seyn, folglich ist $G = 119°27'35''$.

13. Der andere unbekannte Winkel also

$F = 233°50' - 119°27'35'' = 114°22'25''$.

14. Die Seite endlich ist nach §. 20. Nr. 6

$$f = \frac{274{,}275}{\cos.(A + B + C + D + E + F)}$$

15. $A + B + C + D + E + F = 780°32'25''$, mithin

$\cos.(A + B + C + D + E + F) = \cos. 60°32'25''$.

16.

16. log. 274,275 = 2,4381862

log. cos. 60°32′25″ = 9,6917988 — 10

log. f = 2,7463874

folglich die gesuchte Seite FG = f = 557,683.

II. Auflösung:

17. A = 113°23′; also cos. A = — cos. 66°37′

A + B = 198°7′; also cos. (A + B) = — cos. 18°7′

A + B + C = 468°38′; also cos. (A + B + C)

= — cos. 71°22′

A + B + C + D = 574°33′; also cos. (A + B + C + D)

= — cos. 34°33′

A + B + C + D + E = 666°10′; also

cos. (A + B + C + D + E) = + cos. 53°50′.

18. B = 84°44′; mithin cos. B = cos. 84°44′

B + C = 355°15′; mithin cos. (B + C) = cos. 4°45′

B + C + D = 461°10′; mithin cos. (B + C + D)

= — cos. 78°50′

B + C + D + E = 552°47′; mithin cos. (B + C + D + E)

= — cos. 12°47′

19. C = 270°31′; also cos. C = cos. 89°29′

C + D = 376°26′; also cos. (C + D) = cos. 16°26′

C + D + E = 468°3′; also cos. (C + D + E)

= — cos. 71°57′

20. D = 105°55′; mithin cos. D = — cos. 74°5′

D + E = 197°32′; mithin cos. (D + E)

= — cos. 17°32′

21. $E = 91°37'$; folglich $\cos. E = -\cos. 88°23'$.

22. Bestimmt man nun die Gleichung §. 20. Nr. 8, so ist

$+ g^2 = 281961$ . . . . . .
$+ a^2 = 130321$ . . . . . .
$+ b^2 = 146689$ . . . . . .
$+ c^2 = 94864$ . . . . . .
$+ d^2 = 160000$ . . . . . .
$+ e^2 = 358801$ . . . . . .
$- 2\,g\,a \cos. A = 152157$ . . . . . .
$+ 2\,g\,b \cos (A+B) =$ . . . . $- 386581{,}7$
$- 2\,g\,c \cos. (A+B+C) = 104510{,}6$ . . . . . .
$+ 2\,g\,d \cos. (A+B+C+D) =$ . . . . $- 349879$
$- 2\,g\,e \cos. (A+B+C+D+E) =$ . . . . $- 375408$
$- 2\,a\,b \cos. B =$ . . . . . $- 25302{,}7$
$+ 2\,a\,c \cos. (B+C) = 221612{,}2$ . . . . . .
$- 2\,a\,d \cos. (B+C+D) = 55930$ . . . . . .
$+ 2\,a\,e \cos. (B+C+D+E) =$ . . . . $- 421758{,}4$
$- 2\,b\,c \cos. C =$ . . . . . $- 2127{,}5$
$+ 2\,b\,d \cos. (C+D) = 293883{,}5$ . . . . . .
$- 2\,b\,e \cos. (C+D+E) = 142168{,}3$ . . . . . .
$- 2\,c\,d \cos. D = 67572{,}5$ . . . . . .
$+ 2\,c\,e \cos. (D+E) =$ . . . . $- 351841{,}8$
$- 2\,d\,c \cos. E = 13519{,}4$ . . . . . .

folglich $f^2 = 2223989{,}5 - 1912979{,}1$
$= 311010{,}4$, also

23. $f = \sqrt{311010{,}40} = 557{,}7$.

24. Um nun die beyden Winkel zu finden, ist aus §. 20. Nr. 9

+

$+ e^2 = 358801$

$+ f^2 = 311010,4$

$- g^2 = 281961$

$- a^2 = 130321$

$- b^2 = 146689$

$- c^2 = 94864$

$- d^2 = 160000$

$+ 2 a g \cos. A = 152157$

$- 2 g b \cos. (A + B) = 386581,7$

$+ 2 g c \cos. (A + B + C) = 104510,6$

$- 2 g d \cos. (A + B + C + D) = 349879$

$+ 2 a b \cos. B = 25382,7$

$- 2 a c \cos. (B + C) = 221612,2$

$+ 2 a d \cos. (B + C + D) = 55930$

$+ 2 b c \cos. C = 2127,5$

$- 2 b d \cos. (C + D) = 293883,5$

$+ 2 c d \cos. D = 67572,5$

folglich $2 e f \cos. F = 1433782,3 - 1709500,8$

$= -275718,5$. alſo

25. $\cos. F = - \frac{275718,5}{2 e f} r$ (§. 8. IV. Zuſ.)

26. Nun iſt $\log. 275718,5 . r = 15,4404659$

$c . d . \log. 2 = 9,6989700 - 10$

$c . d . \log. e = 7,2225732 - 10$

$c . d . \log. f = 7,2535994 - 10$

mithin $\log. \cos. F = 9,6156085$

$= \log. \cos. 65^\circ 37' 37''$;

27.

27. Der entsprechende Winkel F muß entweder stumpf, also $= 114°22'23''$, oder erhaben, mithin $= 245°37'37''$ seyn, weil dessen Cosinus negativ ist (§. 20. Nr. 10), letzterer Werth aber ist aus Nr. 12 unmöglich, folglich wird $F = 114°22'23''$.

28. Der andere Winkel G endlich, oder

$G = 233°50' - 114°22'23'' = 119°27'37''$.

§. 22.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur (Fig. 2) alle Seiten, ausser einer, z. B. $AF = f$, und alle Winkel, ausser zwey, C, D, die an der unbekannten Seite nicht anliegen, aber doch unmittelbar aufeinander folgen, gegeben sind, obige Seite f nebst den beyden Winkeln C, D zu suchen.

Auflösung:

1. Man nehme die unbekannte Seite f zur Abscissenlinie, und bestimme die beyden Gleichungen der Ordinate für einen der unbekannten Winkel, z. B. C, so ist

2. $Ct = a \sin. A - b \sin. (A+B)$ (§. 5. I.)
$= e \sin. F - d \sin. (F+E) + c \sin. (F+E+D)$
(§. 5. II. Zus.), mithin

3. $\sin. (F+E+D) = [a \sin. A - b \sin. (A+B) - e \sin. F + d \sin. (F+E)] : c.$

4.

4. In dieser Gleichung ist nun alles bis auf D bekannt, mithin läßt sich aus dem gefundenen Zeichen des sin. (F+E+D) angeben, ob der gesuchte Winkel D hohl, oder erhaben ist, wenn nun aber

5. aus eben diesem Sinus der Winkel D ganz bestimmt werden soll, so muß noch im ersten Falle anderswoher bekannt seyn, ob D spitzig oder stumpf, und im andern Falle ob D grösser oder kleiner als 270° sey (§. 292. IX. Zusatz, Trigonometrie).

6. Ist nun D gefunden, so läßt sich auch der andere unbekannte Winkel C aus §. 15 angeben.

7. Die unbekannte Seite f findet man endlich, wenn man sie zur Abscissenlinie, und eine ihrer anliegenden Ecke zum Anfangspunct nimmt, und für die andere anliegende Ecke die entsprechende Abscisse bestimmt, so ist

8. $f = a \cos. A - b \cos. (A+B) + c \cos. (A+B+C)$
$- d \cos. (A + B + C + D)$
$+ e \cos. (A + B + C + D + E)$ (§. 5. II.)
oder auch

9. $f = e \cos. F - d \cos. (F+E) + c \cos. (F+E+D)$
$- b \cos. (F + E + D + C)$
$+ a \cos. (F+E+D+C+B)$ (§. 5. V. Zus.)

10. Nun kann man nach Belieben aus Nr. 8 oder 9 die unbekannte Seite f berechnen.

§. 23.

Beyspiel:

Im Sechsecke (Fig. 2) sey $A = 54°47'$;
$B = 97°49'$; $E = 147°19'$; $F = 66°38'$.
$a = 164$; $b = 85,6$; $c = 110,5$; $d = 77$; $e = 151$.
Man soll die Seite $AF = f$, und die beyden Winkel C, D suchen.

Auflösung:

1. $A = 54°47'$, mithin sin. $A =$ sin. $54°47'$

2. $(A + B) = 152°37'$, mithin sin. $(A + B)$
$=$ sin. $27°24'$

3. $F = 66°38'$, mithin sin. $F =$ sin. $66°38'$

4. $F + E = 213°57'$, mithin sin. $(F + E)$
$=$ — sin. $33°57'$

5. sin. $(F+E+D) =$ sin. $(213°57' + D)$.

6. Berechnet man nun die einzelnen Glieder der Gleichung §. 22. Nr. 3, so ist

7. a sin. A = 134
— b sin. (A+B) = ... — 39,4
— e sin. F = ... — 138,6
+ d sin. (F+E) = ... — 43 , also
die ganze Summe = 134 — 221,0
= — 87, folglich

8. sin. (213°57′ + D) = $-\frac{87}{c}$ r (§. 8. IV. Zus.)

9. Nun ist log. r . 87 = 11,9395193
log. c = 2,0433623
also log. sin. (213°57′ + D) = 9,8961570
= log. sin 51°56′.

10. Indem aber der Sinus negativ ist Nr. 8, so muß
213°57′+D entweder =180°+51°56′=231°56′
..... oder aber =360°—51°56′=308° 4′
seyn,
im ersten Falle würde D=231°56′—213°75′=17°59′
also spitzig,
im andern Falle aber D=308° 4′—213°57′=94° 7′
also stumpf seyn.

11. Wenn nun von der Figur schon ein beyläufiger Grundriß, wie im gegenwärtigen Beyspiel die zweyte Figur vorhanden ist, so läßt sich diese Unbestimmtheit leicht heben, so ist offenbar hier D stumpf, also D = 94°7′.

12. Ferner ist $A+B+D+E+F = 460°40' = f$
und $S = 2R\,(6-2) = 720°$, folglich
$C = S - f = 720° - 460°40' = 259°20'$ (§. 15).

13. Bestimmt man endlich die einzelnen Glieder der Gleichung §. 22. Nr. 8, so ist

$$\begin{aligned} a \cos. A &= 94{,}6 \\ -\, b \cos. (A+B) &= 76 \\ +\, c \cos. (A+B+C) &= 68{,}1 \\ -\, d \cos. (A+B+C+D) &= 63{,}9 \\ +\, e \cos. (A+B+C+D+E) &= 59{,}9 \end{aligned}$$

folglich die Seite $f = 362{,}5$.

Man vergleiche §. 11.

§. 24.

Aufgabe:

Wenn in einem Vielecke alle Seiten bis auf eine, und alle Winkel bis auf zwey, welche aber weder an obiger Seite anliegen, noch unmittelbar aufeinander folgen, gegeben sind, die Seite nebst den beyden Winkeln zu suchen.

Auflösung:

1. Man verbinde die beyden unbekannten Winkel durch eine Diagonal, so kann solche eine doppelte Lage haben, denn sie kann

I. ganz innerhalb der gegebenen Figur, oder

II. ganz oder zum Theil ausser derselben liegen.

2. Für die erste Lage, wenn nemlich (Fig. 7.) alle Seiten auſſer AG = g; und alle Winkel auſſer C und F gegeben ſind, wo alſo die Diagonal CF ganz in die Figur fällt, und letztere in zwey andere Figuren, nemlich in das Viereck CDEF, und das Fünfeck CBAGF zerleget, iſt

3. in der einen derſelben, alles bis auf die Diagonal und die beyden anliegenden Winkel, oder gegenwärtig im Vierecke CDEF alles, auſſer der Seite CF und den Winkel β, γ bekannt, welche ſich alſo aus §. 20 berechnen laſſen, es iſt nemlich

4. $\text{tang. } \beta \frac{d \text{ sin. } D - e \text{ sin. } (D + E)}{c - d \text{ cos. } D + e \text{ cos. } (D + E)}$,

woraus ſich

5. auch der andere Winkel γ nach §. 15 angeben läßt; endlich iſt

6. Die Diagonal $CF = \frac{c - d \text{ cos. } D + e \text{ cos. } (D + E)}{\text{cos. } (D + E + \gamma)}$

(§. 20. Nr. 6).

7. Dadurch iſt nun auch in der andern Figur, gegenwärtig im Fünfecke CBAGF alles auſſer der Seite AG = g, und den beyden unmittelbar aufeinander folgenden Winkeln α, δ bekannt, welche ſich alſo aus §. 22 finden laſſen, es iſt nemlich

8. $\sin.(G+\delta) = \frac{f \sin. G - a \sin. A + b \sin (A+B)}{CF}$,

woraus sich δ, mithin wieder aus §. 15 der andere α angeben läßt; folglich sind dadurch

9. Der Winkel $C = \alpha + \beta$, und der Winkel $F = \gamma + \delta$ gefunden.

10. Endlich ist noch die gesuchte Seite:

$$g = a \cos. A - b \cos.(A+B) + CF \cos.(A+B+\alpha) - f \cos.(A+B+\alpha+\delta).$$

11. Für die zweyte Lage, wenn nemlich (Fig. 7) alle Seiten ausser $AG = g$, und alle Winkel ausser B und E gegeben sind, wo also die Diagonal BE zum Theil ausserhalb der Figur fällt, bekömmt man

12. die gebrochene Linie BCDEB, welche aber in sich zurückkehrt; ferner das Fünfeck BAGFEB.

13. Bey ersterer Linie ist nun

$$\text{tang. } \varepsilon = \frac{c \sin. D - b \sin.(D+C)}{d - c \cos. D + b \cos.(D+C)};$$ und

$$\text{tang. } \varphi = \frac{e \sin. C - d \sin.(C+D)}{b - e \cos. C + d \cos.(C+D)}$$

(§. 6), wo man aber bey den Winkeln auf §. 2. b wohl Rücksicht zu nehmen hat, will man nemlich in diesen Formeln die innern Winkel C, D der gegebenen Figur nehmen, so ist ε und D hohl.

hin-

hingegen C und Φ erhaben, woraus man also erst den entsprechenden hohlen von Φ bestimmen muß.

14. Ferner ist $d = c \cos. D - b \cos. (D + C) + BE \cos. (D + C + \Phi)$ (§. 5. VII. Zus.) also die Diagonal

15. $$BE = \frac{d - c \cos. D + b \cos. (D + C)}{\cos. (D + C + \Phi)}$$

16. Nun ist dadurch im Fünfecke BAGFEB alles bis auf die Seite $AG = g$; und die beyden Winkel ABE, BEF bekannt, folglich nach §. 22

17. $$\sin. (G + F + BEF) = \frac{a \sin. A - f \sin. G + e \sin. (G + F)}{BE}$$

woraus sich nun auch nach §. 15

18. der Winkel ABE angeben läßt, mithin sind nun

19. der Winkel $B = ABE - \Phi$, und $E = BEF + \Phi$ gefunden.

20. Endlich erhält man die unbekannte Seite:

$$AG = g = a \cos. A - BE \cos. (A + ABE) + e \cos. (A + ABE + BEF) - f \cos. (A + ABE + BEF + F).$$

§. 25.

Beyspiel für den ersten Fall der vorigen Aufgabe:

Man soll (Fig. 7) aus $A = 113°23'$; $B = 84°44'$; $D = 105°55'$; $E = 91°37'$; $G = 119°27'35''$; und den Seiten

$a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $f = 557{,}7$ die Seite $AG = g$ und die beyden Winkel C, F suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe die Diagonal CF, so ist im Vierecke CDEF aus §. 24. Nr. 4

$$2.\ \text{tang. } \beta = \frac{d \text{ sin. } D - e \text{ sin. } (D + E)}{c - d \text{ cos. } D + e \text{ cos. } (D + E)}$$

3. Nun ist $D = 105°55'$, also

$\text{sin. } D = \text{sin. } 74°5'$; $\text{cos. } D = -\text{cos. } 74°5'$;

4. $D + E = 197°32'$, mithin

$\text{sin. } (D + E) = -\text{sin. } 17°32'$; $\text{cos. } (D + E) = -\text{cos. } 17°32'$.

5. Berechnet man nun die einzelnen Glieder der Formel, so ist

$d \text{ sin. } D - e \text{ sin. } (D + E) = 384{,}7 + 180{,}5 = 565{,}2$

$-d \text{ cos. } D + e \text{ cos. } (D + E) = 308 + 109{,}7$

$= 571{,}2 = -153{,}5$; mithin

6. tang. $\beta = \frac{r \cdot 565{,}2}{-153{,}5} = -\frac{r \cdot 5652}{1535}$

7. log. r. 5652 = 13,7522022
log. 1535 = 3,1861084

log. tang. β = 10,5660938 = tang. 74°48′21″

8. Da nun diese Tangens negativ ist, so ist β stumpf, also $\beta = 105°11'39''$.

9. Im Vierecke ist $S = 4R = 369°$;
ferner $\beta + D + E = f = 302°43'39''$, folglich
$\gamma = S - f = 360° - 302°43'39'' = 57°16'21''$

10. $D + E + \gamma = 254°48'21''$, mithin
cos. $(D + E + \gamma)$ = − cos. 74°48′21″;
folglich

11. $CF = \frac{c - d \cos. D + e \cos. (D + E)}{\cos. (D + E + \gamma)}$

§. 24. Nr. 6.)

$= \frac{-153{,}5}{-\cos. 74°48'21''} = \frac{153{,}5}{\cos. 74°48'21''}$

12. log. 153,5 = 2,1861084
log. cos. 74°48′21″ = 9,4184519 − 10

log. CF = 2,7676565

13. folglich die Diagonal CF = 585,7.

14. Im Fünfecke CBAGF sind nun alle Seiten ausser g, und alle Winkel ausser α, δ bekannt, und es ist

15. $\sin.(G + \delta) = \frac{f \sin. G - a \sin. A + b \sin.(A + B)}{C F}$

(§. 24. Nr. 8.)

16. $G = 119°27'35''$; also $\sin. G = \sin. 60°32'25''$

$A = 113°22'$; mithin $\sin. A = \sin. 66°37'$

$A + B = 198°7'$, folglich $\sin.(A + B)$

$= -\sin. 18°7'$.

17. Berechnet man nun die einzelnen Glieder des Zählers, so findet man:

$\sin.(G + \delta)$

$= \frac{485,6 - 331,4 - 119,1}{585,7} r = \frac{35,1}{585,7} r$

18. $\log. 351,1 \times r = 11,5453071$

$\log. 585,7 = 2,7676565$

$\log. \sin.(G + \delta) = 8,7776506$

$= \log. \sin. 3°26'9''$

19. Nun ist aber der Sinus von $G + \delta$ positiv, mithin $G + \delta = 180° - 3°26'9''$, das ist $119°27'35'' + \delta = 176°33'51''$; folglich $\delta = 57°6'16''$

20. Ferner ist im Fünfecke $S = 2R \cdot 3 = 540°$; $A + B + G + \delta = f = 374°40'51''$, mithin $\alpha = S - f = 540° - 374°40'51''$

$= 165°19'9''$

21.

21. Folglich sind die beyden Winkel

$C = \alpha + \beta = 165^\circ\,19'9'' + 105^\circ\,11'39''$ (Nr. 8 und 20)

$= 270^\circ 30' 48''$,

$F = \gamma + \delta = 57^\circ 16' 21'' + 57^\circ 6' 16''$ (Nr. 9 u. 19)

$= 114^\circ 22' 37''$.

22. Die Seite AG, oder

$$g = a \cos. A - b \cos. (A + B) + CF \cos. (A + B + \alpha) - f \cos. (A + B + \alpha + \delta)$$

(§. 24. Nr. 10).

23. Nun ist $A = 113^\circ 23'$; also $\cos. A = -\cos. 66^\circ 37'$

$A + B = 198^\circ 7'$; mithin $\cos. (A + B)$

$= -\cos. 18^\circ 7'$

$A + B + \alpha = 363^\circ 26' 9''$; $\cos. (A + B + \alpha)$

$= \cos. 3^\circ 26' 9''$

$A + B + \alpha + \delta = 420^\circ 32' 25''$; $\cos. (A + B + \alpha + \delta)$

$= \cos. 60^\circ 32' 25''$.

24. Suchet man die einzelnen Glieder der Gleichung, so ist

$a \cos. A$	$=$	$+ \ldots - 143{,}3$
$- b \cos. (A + B)$	$=$	$+ 364 - \ldots$
$+ CF \cos. (A + B + \alpha)$	$=$	$584{,}6 - \ldots$
$- f \cos. (A + B + \alpha + \delta)$	$=$	$\ldots - 274{,}3$
folglich die Seite $AG = g$	$=$	$948{,}6 - 417{,}6$
	$=$	$531.$

§. 26.

§. 26.

Beyspiel für den zweyten Fall der vorhergehenden Aufgabe:

Man soll (Fig. 7) aus $A = 113^\circ 23'$; $C = 270^\circ 31'$; $D = 105^\circ 55'$; $F = 114^\circ 22' 25''$; $G = 119^\circ 27' 35''$;

den Seiten $a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $f = 557{,}7$ die Seite $AG = g$ nebst den beyden Winkeln B, E suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe die Diagonal BE, so sind von der gebrochenen Linie EDCBE, welche in sich selbst zurückkehret, alle Seiten ausser BE, und alle Winkel ausser den beyden anliegenden ε, Φ gegeben.

2. Will man bey D und C die innern gegebenen Winkel der Figur nehmen, so darf man nur die Bestimmung derselben bey E, nach D, C, B der Ordnung nach fortsetzen, (§. 2. b.), so daß also ε, D hohl, hingegen C, Φ erhaben sind.

3. $$\text{tang. } \varepsilon = \frac{c \sin. D - b \sin. (D + C)}{d - c \cos. D + b \cos. (D + C)}$$

(§. 24. Nr. 13), und

4. tang. $\varphi = \frac{c \sin. C - d \sin. (C+D)}{b - c \cos. C + d \cos. (C+D)}$

5. Nun ist $C = 270°31'$; mithin
$\sin. C = -\sin. 89°29'$; $\cos. C = \cos. 89°29'$.

6. $D = 105°55'$; also $\sin. D = \sin. 74°5'$;
$\cos. D = -\cos. 74°5'$;
$C + D = 376°26'$; $\sin. (C+D) = \sin. 16°26'$;
$\cos. (C+D) = \cos. 16°26'$.

7. Bestimmt man nun die einzelnen Glieder des Zählers und Nenners in obigen Gleichungen, so ist

8. $c \sin. D - b \sin. (D + C) = 296{,}2 - 108{,}4$
$= 187{,}8$
$d - c \cos. D + b \cos. (D + C) = 400 + 84{,}5$
$+ 367{,}4 = 851{,}9$, mithin

9. tang. $\varepsilon = \frac{187{,}8}{851{,}9}$ $r = \frac{r \cdot 1878}{8519}$

10. $\log. r \cdot 1878 = 13{,}2736956$
$\log. 8519 = 3{,}9303886$
$\log. \text{tang. } \varepsilon = 9{,}3433070 = \text{tang. } 12°25'54''$,
mithin

11. $\varepsilon = 12°25'54''$

12. Ferner $c \sin. C - d \sin. (C+D) = -308$
$- 113{,}2 = -421{,}2$
$b - c \cos. C + d \cos. (C+D) = 383 - 2{,}8$
$+ 383{,}7 = 763{,}9$, also

13. tang. $\varphi = \frac{-421{,}2 \times r}{+763{,}9} = -\frac{r \cdot 4212}{7639}$

14. log. r . 4212 = 13,6244884
log. 7639 = 3,8830365
log. tang. φ = 9,7414519
= tang. 28°52'17".

15. Nun ist aber die Tangens φ negativ, folglich ist der erhabene Winkel davon 331°7'43"; der innere entsprechende hohle 28°52'17".

16. Die Diagonal endlich

$$BE = \frac{d - c \cos. D + b \cos. (D + C)}{\cos. (D + C + \varphi)}$$

(§. 24. Nr. 15.)

17. Ferner D + C + φ = 707°33'43"
cos. (D + C + φ) = cos. 12°26'17", also

18. $BE = \frac{851{,}9}{\cos. 12°26'17"}$

19. log. 851,9 = 2,9303886
log. cos. 12°26'17" = 9,9896853 — 10
log. BE = 2,9407033; folglich

20. die Diagonal BE = 872, 4, oder genauer
= 872,37.

21. Im Fünfecke BAGFEB ist nun alles ausser der Seite AG = g, nebst den beyden Winkeln ABE, BEF gegeben, und

22.

22. $\sin.(G+F+BEF) = \frac{a \sin. A - f \sin. G + e \sin.(G+F)}{BE}$

(§. 24. Nr. 17).

23. Nun ist $A = 113°23'$, mithin $\sin. A = \sin. 66°37'$
$G = 119°27'35''$, also $\sin. G = \sin\ 60°32'25''$
$F+G = 233°50'$; folglich $\sin.(F+G) - \sin. 53°50'$.

24. Berechnet man die einzelnen Glieder der Gleichung, so ist:

$$\sin.(G+F+BEF) = \frac{331,4 - 485,6 - 483,6}{872,4} r = -\frac{637,8}{872,4} r$$

25. $\log. r . 637,8 = 12,8046845$
$\log. 872,4 = 2,9407033$

$\log. \sin.(G+F+BEF) = 9,8639812$
$= \sin. 46°58'46''.$

26. Nun ist aber der Sinus negativ, mithin
$233°50' + BEF$ entweder $= 180 + 46°58'46''$,
welches aber unmöglich ist, weil sonst BEF negativ seyn müßte; oder
$233°50' + BEF = 360° - 46°58'46'' = 313°1'14''$,
folglich

27. $BEF = 79°11'14''$.

28. Ferner ist im Fünfecke $S = 540°$
$A+G+F+BEF = f = 426°24'14''$, mithin
$ABE = S - f = 113°35'46''$, folglich

29. die beyden Winkel

$$B = ABE - \varphi = 84^\circ 43' 29''$$ (Nr. 15 u. 28)

$$E = BEF + \varepsilon = 91^\circ 37' 8''$$ (Nr. 11 u. 27).

30. Endlich ist die unbekannte Seite

$$g = a \cos. A - BE \cos. (A + ABE) + e \cos. (A + ABE + BEF) - f \cos. (A + ABE + BEF + F)$$

(§. 24. Nr. 20).

31. Ferner ist $A = 113^\circ 23'$; also

$$\cos. A = - \cos. 66^\circ 37$$

$A + ABE = 226^\circ 58' 46''$; $\cos. (A + ABE) = - \cos. 46^\circ 58' 46''$

$A + ABE + BEF = 306^\circ 10'$; $\cos. (A + ABE + BEF) = \cos. 53^\circ 50'$

$A + ABE + BEF + F = 420^\circ 32' 25''$; mithin $\cos. (A + ABE + BEF + F) = \cos. 60^\circ 32' 25''$.

32. Berechnet man nun die einzelnen Glieder der Gleichung, so ist:

$a \cos. A$	$=$	$+ \ldots$	$- 143{,}3$
$- BE \cos. (A + ABE)$	$=$	$595{,}2$	$- \ldots$
$+ e \cos. (A + ABE + BEF)$	$=$	$353{,}5$	$- \ldots$
$- f \cos. (A + ABE + BEF + F)$	$=$	$\ldots$	$- 274{,}3$
folglich die Seite $AG = g$	$=$	$948{,}7$	$- 417{,}6$
	$=$	$531{,}1$.	

III. Abschnitt.

Bestimmung dreyer Winkel.

§. 27.

Aufgabe:

In einer geradlinigten Figur (Fig. 8) sind alle Seiten, und alle Winkel, die drey unmittelbar aufeinander folgenden A, F, E ausgenommen, gegeben, man soll letztere suchen.

Auflösung:

1. Für den mittlern unbekannten Winkel F ist

$$\cos. F = [e^2 + f^2 - a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2ab \cos. B - 2ac \cos. (B + C) + 2ad \cos. (B + C + D) + 2bc \cos. C - 2bd \cos. (C + D) + 2cd \cos. D] : 2ef.$$

(§. 7).

2. Es muß nun wieder anderswoher bekannt seyn, ob F hohl oder erhaben ist, wenn dieser Winkel aus der Gleichung bestimmt werden soll.

3. Nun ziehe man für die beyden andern unbekannten Winkel A, E die Diagonal AE, so ist

4. im Dreyecke AFE:

$$\text{tang. } \alpha = \frac{e \sin. F}{f - e \cos. F}$$ (§. 6. I. Zus.),

woraus sich nun auch

5. Der Winkel $\gamma = 2R - (F + \alpha)$ ergiebt.

6. Im Fünfecke ABCDEA ist alles bis auf die Seite AE nnd die beyden anliegenden Winkel β, δ gegeben, man findet daher die beyden Winkel aus §. 20, es ist nemlich:

7. $$\text{tang. } \beta = \frac{b \sin. B - c \sin. (B+C) + d \sin. (B+C+D)}{a - b \cos. B + c \cos. (B+C) - d \cos. (B+C+D)}$$

8. Ferner ist $\delta = S - f$ (§. 15), folglich

9. $A = \alpha + \beta$, und $E = \gamma + \delta$, mithin sind nun auch die beyden andern Winkel gefunden.

I. Zusatz: Es läßt sich die Anwendung leicht auf jene Fälle machen, wo unter den unbekannten Winkeln erhabene begriffen sind, z. B. man soll (Fig. 6) die Winkel B, A, D suchen. Der mittlere, oder hier A wird nach Nr. 1 gefunden, verbindet man nun die beyden andern durch die Diagonal BD, so fällt solche ausserhalb der Figur, es lassen sich aber im Dreyeck BAD wieder die beyden Winkel ABD, ADB nach Nr. 4 u. 5; ferner im Dreyecke BCD ebenfalls die Winkel CBD, CDB, mithin auch $B = CBD - ABD$; und $D = CDB - ADB$ finden.

II. Zusatz: Die Auflösung gilt auch von jeder gebrochenen Linie, welche in sich selbst zurückkehrt.

§. 28.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Aus den Seiten (Fig. 8) a = 114; b = 98,5; c = 55; d = 89; e = 100,85; f = 154; und den Winkeln B = 107°7′; C = 148°21′; D = 112°22′; die drey aufeinander folgenden Winkel A, F, E suchen.

Auflösung:

1. B = 107°7′; also sin. B = sin. 72°53′; cos. B = — cos. 72°53′

2. B + C = 255°28′, mithin sin. (B + C) = — sin. 75°28′; cos. (B + C) = — cos. 75°28′

3. B + C + D = 367°50′, also sin. (B + C + D) = sin. 7°50; cos. (B + C + D) = cos. 7°50′

4. C = 148°21′; cos. C = — cos. 31°39′

5. C + D = 260°43′; mithin cos. (C + D) = — cos. 80°43′.

6. D = 112°22′; cos. D = — cos. 67°38′.

7. Berechnet man nun die einzelnen Glieder der Gleichung §. 27. Nr. 1, so erhält man

$e^2 = +$ 10170,72 — .....

$+ f^2 =$ 23716,00 — .....

$- a^2 =$ ..... — 12996,00

$- b^2 =$ ..... — 9702,25

$- c^2 =$ ..... — 3025,00

$- d^2 =$ ..... — 7921,00

$+ 2ab \cos. B =$ ..... — 6609,80

$- 2ac \cos.(B+C) =$ 3146,83 — .....

$+ 2ad \cos.(B+C+D) =$ 20102,65 — .....

$+ 2bc \cos. C =$ ..... — 9223,50

$- 2bd \cos.(C+D) =$ 2828,37 — .....

$+ 2cd \cos. D =$ ..... — 3725,41

Summe = 59964,57 — 53202,96

= 6761,61; folglich

8. $\cos. F = \frac{6761,61}{2ef}$ r.

9. Nun ist log. r . 6761,61 = 13.8300501

compl. dec. log. 2 = 9,6989700 — 10

compl. dec. log. e = 7,9963241 — 10

compl. dec. log. f = 7,8124793 — 10

folglich log. cos. F = 9,3378235

= log. cos. 77°25'37"

10. Da sich endlich unmittelbar aus der gegebenen Figur ergiebt, daß F hohl ist, so wird

F = 77°25'37"

11. Ferner ist im Dreyecke AFE

= tang.

$$\text{tang. } \alpha = \frac{e \text{ sin. } F}{f - e \text{ cos. } F}$$ (§. 27. Nr. 4); und

12. e sin. F = 98,43

f — e cos. F = 154 — 21,95 = 132,05, also

13. $\text{tang. } \alpha = \frac{9843}{13205}$ r, und

log. r . 9843 = 13,9931275

log. 13205 = 4,1207384

---

also log. tang. α = 9,8723891

= tang. 36°42'3"

14. mithin ist α = 36°42'3", und

$\gamma = 180° - (\alpha + F)$ = 65°52'20"

15. Ferner, wenn man die einzelnen Glieder der Gleichung §. 27 Nr. 7 berechnet, so ist

b sin. B = 94,14

— c sin. (B+C) = 53,24

+ d sin. (B+C+D) = 12,13

Mithin der Zähler = 159,51

---

16. Eben so a = 114 — . . . .

— b cos. B = 28,99 — . . . .

+ c cos. (B+C) = ... — 13,8

— d cos. (B+C+D) = ... — 88,18

Also der Nenner = 142,99 — 101,98 = 41,01

17. Folglich tang. $\beta = \frac{159,51}{41,01}$ r = $\frac{15951}{4101}$ r.

Nun

Nun ist log. r . 15951 = 14,2027879
log. 4101 = 3,6128898

also log. tang. β = 10,5898981
= tang. 75°34'53".

18. Mithin β = 75°34'53", und
da im Fünfecke S = 2R . 3 = 90°.6 = 540°,
ferner β + B + C + D = f = 443°24'53", so ist
19. δ = S − f = 96°35'7", folglich

20. A = α + β = 112°16'56" (Nr. 14 u. 18)
E = γ + δ = 16°27'27" (N. 14 und 19),
folglich sind alle 3 Winkel gefunden.

§. 29.

Aufgabe:

In einer geradlinigten Figur ist alles bis auf drey Winkel B, E, G (Fig. 7), die nicht unmittelbar auf einander folgen, gegeben, man soll letztere suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe zwischen den 3 unbekannten Winkeln die Diagonalen BG, BE, EG, so erhält man das Dreyeck BEG, in welchem

2. über jeder Seite eine geradlinigte Figur oder gebrochene Linie steht, von der alles bis auf die Seite dieses Dreyeckes, nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben ist, die sich also aus §. 20 bestimmen lassen, es ist nemlich

3. im gegenwärtigen Siebenecke für das Dreyeck BAG:

$$BG = \sqrt{a^2 + g^2 - 2ag \cos. A}$$ (§. 8. I. Zusatz)

$$\text{tang. } \mu = \frac{a \sin. A}{g - a \cos. A}$$ (§. 6. I. Zus.)

$$\vartheta = 2R - (A + \mu).$$

4. Eben so ist für das Dreyeck GFE

$$GE = \sqrt{e^2 + f^2 - 2ef \cos. F}$$

$$\text{tang. } \eta = \frac{f \sin. F}{e - f \cos. F}$$

$$\varrho = 2R - (F + \eta).$$

5. Bey der gebrochenen Linie BCDE wird

$$\text{tang. } \varepsilon = \frac{c \sin. D - b \sin. (D+C)}{d - c \cos. D + b \cos. (D+C)}$$

$$\text{tang. } \varphi = \frac{c \sin. C - d \sin. (C+D)}{b - c \cos. C + d \cos. (C+D)}$$

$$BE = \frac{d - c \cos. D + \cos. (D + C)}{\cos. (D + C + \varphi)}$$

(§. 24. Nr. 13 — 15).

6. Aus den drey Seiten, BG, BE, GE lassen sich nun auch die drey Winkel ι, ν, $(\psi + \varphi)$ aus §. 339, Trigonometrie, im Dreyecke BEG bestimmen.

7. Dadurch sind endlich die drey Winkel gefunden, denn

$$B = \vartheta + (\psi + \varphi) - \varphi$$

$$E = \varepsilon + \iota + \eta; \text{ und } G = \mu + \nu + \varrho.$$

§. 30.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Aus $a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$; $f = 557{,}683$; $g = 531$; und den Winkeln $A = 113°23'$; $C = 270°31'$; $D = 105°55'$; $F = 114°22'25''$. (Fig. 7) die Winkel B, E, G zu suchen.

Auflösung:

1. Man ziehe die Diagonalen BG, BE, EG, so ist

2. im Dreyecke BAG: $BG^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos. A$ (§. 29. Nr. 3)

$$a^2 = 130321$$
$$+ g^2 = 281961$$
$$- 2ag \cos. A = 152157$$

folglich $BG^2 = 564439$, mithin

3. $BG = 751{,}29$.

4. Ferner tang. $\mu = \frac{a \sin. A}{g - a \cos. A} r = \frac{331{,}351}{531 + 143{,}274} r$

und

und log. r . 331,331 = 12,5202884

log. 674,274 = 2,8288364

log. tang. μ = 9,6914520

= tang. 26°10'13", also

5. μ = 26°10'13", und

6. $\vartheta = 180° - (A + \mu) = 40°26'47"$.

7. Eben so ist im Dreyecke GFE

$GE^2 = e^2 + f^2 - 2\,e\,f \cos. F$;

Nun ist e^2 = 358801

$+ f^2$ = 311010,33

$- 2\,e\,f \cos. F$ = 275712

GE^2 = 945523,33, mithin

8. GE = 972,33.

9. Ferner tang. η

$$= \frac{f \sin. F}{e - f \cos. F}\, r = \frac{507,98}{599 + 230,14}\, r$$

log. r . 507,98 = 12,7058456

log. 829,14 = 2,9186279

log. tang. η = 9,7872177

= 1 . tang. 31°29'38",

mithin

10. η = 31°29'38", und

11. $\varrho = 180^2 - (F + \eta) = 34°7'57"$.

12. Für die gebrochene Linie BCDE findet man wie §. 26. Nr. 1 — 20

$\varepsilon = 12°25'54''$, und

13. $\varphi = 28°52'17''$, endlich

14. BE = 872,38.

15. Im Dreyecke BEG ist aus Nr. 3, 8 u. 14

log. (BE+BG+GE) = log. 2596,05 = 3,4143131
log. (BG+GE—BE) = log. 851,29 = 2,9300775
log. (BE+GE—BG) = log. 1093,47 = 3,0388069
log. (BE+BG—GE) = log. 651,29 = 2,8137744

Mithin (§. 339. I. Zus. Trigon.) log. u^2 = 12,1969719
: 2
log. u = 6,0984859

16. log. u . r = 16,0984859
compl. d. log. 2 = 9,6989700 — 10
c. d log. BG = 7,1241924 — 10
c. d. log. BE = 7,0592967 — 10

log. sin. $(\varphi+\psi)$ = 9,9809450
= log. sin. 73°9'5"

17. log. u . r = 16,0984859
compl. d. log. 2 = 9,6989700 — 10
c. d. log. BG = 7,1241924 — 10
c. d. log. GE = 7,0121640 — 10

log. sin. γ = 9,9338123
= log. sin. 59°9'52"

18. log. u . r = 16,0984859
c. dec. log. 2 = 9,6989700 = 10
c. dec. log. BE = 7,0592967 — 10
c. dec. log. GE = 7,0121640 = 10

log. sin. ι = 9,8689166
= log. sin. 47°41'9".

19. Nun lassen sich die 3 gesuchten Winkel bestimmen, es ist nemlich

$B = \vartheta + (\varphi + \psi) - \varphi$ = 40°26'47" + 73°9'5"
— 28°52'17" (Nr. 6. 13 u. 16) = 84°43'35"

$E = \varepsilon + \iota + \eta$ = 12°25'54" + 47°41'9"
+ 31°29'38" (Nr. 10, 12, 18)
= 91°36'41"

$G = \mu + \nu + \varrho$ = 26°10'13" + 59°9'52"
+ 34°7'57" (Nr. 5, 11, 17) = 119°28'2"

§. 31.

Aufgabe:

Wenn in einer geradlinigten Figur alles bis auf 3 Stücke, welche nicht lauter Seiten sind, gegeben ist, eine beliebige Diagonal zu suchen.

Auflösung:

1. Die verlangte Diagonal liegt entweder ganz innerhalb der gegebenen Figur, wie CF (Fig. 7), oder

2. sie liegt ganz ausserhalb derselben, wie BD (Fig. 6), oder endlich

3. sie schneidet eine oder mehrere Seiten, und liegt also zum Theil innerhalb, und zum Theil ausserhalb der gegebenen Figur, wie BE (Fig. 7).

4. Im ersten Falle steht auf jeder Seite der Diagonal CF (Fig. 7) eine geradlinigte Figur, auf der einen nemlich CBAGF, und auf der andern Seite CDEF, für jede dieser beyden Figuren läßt sich aus den gegebenen Stücken vermittels der vorhergehenden Aufgaben §. 15 — 29 alles so bestimmen, daß nur noch die Diagonal CF nebst den anliegenden Winkeln α, δ, und β, γ unbekannt sind, wo man endlich die gesuchte Diagonal aus §. 20 erhält.

5. Im zweyten Falle stehen über der Diagonal BD (Fig. 6) zwey Figuren BAD, und BCD, in denen sich alles wie Nr. 4 verhält, und wo man also auf die nemliche Art die Diagonal BD berechnen kann.

6. Im dritten Falle ist die Diagonal BE (Fig. 7) zugleich Seite der geradlinigten Figur BAGFEB, und der gebrochenen Linie BCDE, wo sich aber wieder für beyde alles wie Nr. 4 verhält, und eben so die Diagonal gefunden wird.

III. Hauptstück.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes der Figuren zu ihren Seiten und Winkeln.

I. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Dreyeckes zu seinen Seiten und Winkeln.

Vorerinnerung:

Im gegenwärtigen Abschnitte, wo nicht das Gegentheil ausdrücklich angezeiget ist, bezeichnen A, B, C die Winkel, a, b, c ihre opponirten Seiten der Ordnung nach, p einen von der Spitze B auf die Grundlinie gezogenen Perpendikel, und $\triangle$ den Flächeninhalt des Dreyeckes ABC (Fig. 4).

§. 32.

Lehrsatz: (Fig. 4)

$$\triangle = \frac{a^2 \text{ sin. B sin. C}}{2 \text{ sin. (B + C)}}$$

Be-

Beweis:

1. Man ziehe aus B auf b den Perpeudikel $BD = p$, so ist

2. $a : p = r : \sin. C$ (§. 323. Trigon.) mithin

$$p = a \sin. C.$$

3. $b : a = \sin. B : \sin. A$ (§. 330. Trigon.)
$= \sin. B : \sin. (B + C)$ (§. 15. 1. Zusatz),

also

$$b = \frac{a \sin. B}{\sin. (B + C)}$$

4. Nun ist $\Delta = \frac{b\ p}{2}$ (§. 151. Geometrie), folglich

5. $$\Delta = \frac{a^2 \sin. B \sin. C}{2 \sin. (B + C)}$$ (Nr. 2 u. 3).

I. Zusatz: Aus einer Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln ist der Flächeninhalt eines Dreyeckes gegeben.

II. Zusatz: Eben so läßt sich aus dem gegebenen Flächeninhalt eines Dreyeckes, nebst den beyden Winkeln, welche an einer Seite anliegen, letztere finden, denn $a = \sqrt{\frac{2 \Delta \sin. (B + C)}{\sin. B \sin. C}}$

III. Zusatz: Aus dem Flächeninhalt eines Dreyeckes, einer Seite und einem anliegenden Winkel ist auch der andere bestimmet; denn

$2\Delta \sin.(B+C) = a^2 \sin. B \sin. C$, oder

$2\Delta [(\sin. B \cos. C) + (\cos. B \sin. C)]$

$= a^2 \sin. B \sin. C$ (§. 306. Trigon.), also

$$\frac{\sin. B \cos. C}{\sin. B \sin. C} + \frac{\cos. B \sin. C}{\sin. B \sin. C} = \frac{a^2}{2\Delta},$$

mithin

$$\frac{\cos. C}{\sin. C} + \frac{\cos. B}{\sin. B} = \cot. C + \cot. B$$

$$(\S. 303. \text{ Trigon.}) = \frac{a^2}{2\Delta};$$

folglich $\cot. C = \frac{a^2}{2\Delta} - \cot. B$, und

eben so $\cot. B = \frac{a^2}{2\Delta} - \cot. C.$

§. 33.

Lehrsatz: (Fig. 4.)

$$\Delta = \frac{a^2 \sin. C \sin.(A+C)}{2 \sin. A}$$

Beweis:

1. $a : p = 1 : \sin. C$; mithin

$p = a \sin. C$

2. $b : a = \sin. B : \sin. A = \sin.(A+C) : \sin. A$,

also

$b =$

$$b = \frac{a \sin.(A+C)}{\sin. A}, \text{ folglich}$$

$$3.\ \Delta = \frac{b\ p}{2} = \frac{a^2 \sin. C \sin.(A+C)}{2 \sin. A}$$

I. Zusatz: Im Dreyecke ist durch eine Seite und zwey Winkeln, wovon der eine anliegt, und der andere gegenübersteht, der Flächeninhalt desselben gegeben.

II. Zusatz: Aus dem gegebenen Flächeninhalt eines Dreyeckes und zwey Winkeln läßt sich jede gegenübergegenüberstehende Seite finden. Denn

$$a = \sqrt{\frac{2\Delta \sin. A}{\sin. C \sin.(A+C)}}$$

§. 34.

Lehrsatz: (Fig. 4.)

$$\Delta = \frac{a\,b \sin. C}{2}$$

Beweis:

1. $a : p = 1 : \sin. C$: mithin

2. $p = a \sin. C$; folglich

$$3.\ \Delta = \frac{b\ p}{2} = \frac{a\,b \sin. C}{2}.$$

I. Zusatz: Aus zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel ist der Flächeninhalt eines Dreyeckes gegeben.

II. Zusatz: Aus dem Flächeninhalte, einem Winkel und einer anliegenden Seite, läßt sich die andere anliegende Seite im Dreyecke finden. Denn

$$a = \frac{2\Delta}{b \sin. C}; \text{ und eben so } b = \frac{2\Delta}{a \sin. C}.$$

III. Zusatz: Aus dem gegebenen Inhalte eines Dreyeckes nebst zweyen Seiten läßt sich der Winkel berechnen, den sie einschliessen. Denn

$$\sin. C = \frac{2\Delta}{ab}.$$

IV. Zusatz: Um aus zwey Seiten und einem Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüber liegt, den Flächeninhalt des Dreyeckes zu berechnen, muß man erst noch aus §. 330, Trigonometrie, den andern opponirten Winkel suchen, weil unter obigen Bedingungen das Dreyeck noch nicht vollkommen bestimmt ist. (§. 38, VI. Zus. Geom.)

V. Zusatz: Aus allen drey Seiten ist der Flächeninhalt eines Dreyeckes vollkommen bestimmt. Denn

$$\Delta = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{4}$$

$$= \frac{u}{4} \text{ (§. 343, Trigonometrie).}$$

§. 35.

Aufgabe: (Fig. 9.)

Aus $A = 113^\circ 23'$; $B = 84^\circ 44'$; $C = 270^\circ 31'$;
$D = 105^\circ 55'$; $E = 91^\circ 37'$; $F = 114^\circ 22' 25''$;
$G = 119^\circ 27' 35''$
und den anliegenden Seiten der Ordnung nach
$a = 361$; $b = 383$; $c = 308$; $d = 400$; $e = 599$;
$f = 557{,}683$; $g = 531$ den Flächeninhalt des Vielecks zu suchen.

II. Auflösung:

1. Man zerlege die Figur durch Diagonalen in Dreyecke, so ist

2. $\triangle BAG \dfrac{a\,g\,\sin.\,A}{2}$ (§. 34) $= 87973{,}7$.

3. Ferner ist $BG^2 = a^2 + g^2 - 2a\,g\,\cos.\,A$ (§. 8. I. Zus.)

Nun ist $a^2 = 130321$
$g^2 = 281961$
$-2ag\,\cos.\,A = 152157$

mithin $BG^2 = 564439$, folglich

4. $BG = 751{,}29$

5. $\sin.\,ABG = \dfrac{2\,\triangle ABG}{a \,.\, BG}$ (§. 34. III. Zus.),

wo man zugleich bey der Berechnung mit Logarithmen auf §. 8. IV. Zus. Rücksicht nehmen muß,

muß, dadurch erhält man ABG = 40°27′; ferner

6. den Winkel AGB = 26°10′.

7. Im Dreyecke CBG sind also die beyden Seiten BC = b, und BG nebst dem eingeschlossenen Winkel CBG = B — ABG = 84°44′ — 40°27′ = 44°17′ bekannt, also

8. $\Delta CBG = \frac{b \cdot BG \sin. CBG}{2} = 10045{,}2$, und

9. $CG^2 = b^2 + BG^2 - 2b \cdot BG \cos. CBG$.

Nun ist $b^2 = 146689$

$+ BG^2 = 564439$

$- 2b \cdot BG \cos. CBG = \ldots - 411989{,}6$

mithin $CG^2 = 711128 - 411989{,}6$

$= 299138{,}4$, folglich

10. CG = 546,93

11. $\sin. BCG = \frac{2 \Delta BCG}{b \cdot CG} = \sin. 73°33'$; da aber der Winkel stumpf ist, so wird

12. Der Winkel BCG = 106°27′, und also

13. der Winkel BGC = 29°16′.

14. Im Dreyecke CGF sind nun die beyden Seiten GF = f, und CG nebst dem eingeschlossenen Winkel CGF = G — (AGB + BGC) = 64°1′35″ gegeben, mithin

15. $\triangle CGF = \frac{f \,.\, CG \text{ sin. } CGF}{2} = 137103$

16. Ferner $CF^2 = f^2 + CG^2 - 2f \,.\, CG \text{ cos. } CGF.$

Nun ist $f^2 = 311010{,}32$

$+ CG^2 = 299138{,}40$

$- 2f \,.\, CG \text{ cos. } CGF = \ldots\ldots - 267165{,}70$

Mithin $CF^2 = 610148{,}72 - 267165{,}70$

$= 342983{,}02$; folglich

17. $CF = 585{,}65.$

18. sin. $CFG = \frac{2 \triangle CGF}{f \,.\, CF} =$ sin. $57°6'$, mithin

19. der Winkel $CFG = 57°6'$, und
der Winkel $FCG = 58°52'25''.$

20. Im Dreyecke CFE sind wieder die beyden Seiten $EF = e$, und CF, nebst dem eingeschlossenen Winkel $CFE = F - CFG = 57°16'25''$ gegeben, mithin ist

21. $\triangle CFE = \frac{e \,.\, CF \text{ sin. } CFE}{2} = 147559{,}1$

22. Im letzten Dreyecke CDE sind endlich unmittelbar die beyden Seiten c, d nebst dem eingeschlossenen Winkel D gegeben, mithin ist

23. $\triangle CDE = \frac{c\,d \text{ sin. } D}{2} = 59238{,}3.$

24. Nun ist $\triangle BAG = 87973{,}7$ (Nr. 2)
$\triangle CBG = 100452{,}4$ (Nr. 8)
$\triangle CGF = 137103$ (Nr. 15)
$\triangle CFE = 147559{,}1$ (Nr. 21)
$\triangle CDE = 59238{,}3$ (Nr. 23)

folglich Polyg. ABCDEFGA = 532326,50.

§. 36.

Aufgabe:

Man soll von einer geradlinigten Figur ADEF (Fig. 10) ein Dreyeck vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß dessen Spitze in A falle, und die Grundlinie die Seite AF unter dem gegebenen Winkel C schneide.

Auflösung:

1. Von dem Dreyecke, das man abschneiden soll, ist dessen Flächeninhalt = $\triangle$, nebst den beyden Winkeln A, C, die an der Seite AC = b anliegen, gegeben, mithin ist

2. $b = \sqrt{\frac{2 \triangle \sin.(A+C)}{\sin. A \sin. C}}$ (§. 32. II. Zus.)

3. Man nehme nun von A auf der Seite AF die Linie AC = b, ziehe durch C unter dem gegebenen Winkel die Linie CB, so erhält man das verlangte Dreyeck ABC.

Zusatz:

Zusatz: Wenn der bestimmte Winkel C ein rechter ist, so ist sin. C = 1, und cos. C = cos. 90° = 0, mithin

$$b = \sqrt{\frac{2\,\Delta \text{ sin. } (A + 90°)}{\text{sin. } A}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2\,\Delta}{\text{sin. } A} (\text{sin. } A \text{ cos. } 90° + \text{cos. } A \text{ sin. } 90°)\right)}$$

(§. 306. Trigon.)

$$= \sqrt{\left(\frac{2\,\Delta}{\text{sin. } A} \text{ cos. } A\right)} = \sqrt{2\Delta \text{ cot. } A}$$

(§. 303. Trigon.)

§. 37.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Man soll von dem Vierecke ADEF (Fig. 10), dessen Winkel A = 79°58′27″ ist, ein Dreyeck von 10109,23 □Fuß abschneiden, welches seine Spitze in A hat, und dessen Grundlinie die Seite AE vom Vierecke unter dem Winkel C = 63°57′13″ schneidet.

Auflösung:

1. A + C = 143°55′40″; mithin
   sin. (A + C) = sin. 36°4′20″.

2.

2. Ferner ist log. 2 = 0,3010300
log. △ = 4,0047181
log. sin. (A + C) = 9,7699712 — 10
compl. d. log. sin. A = 0,0066832 (§. 8. V. Zus.)
c. dec. log. sin. C = 0,0465115

log. b^2 = 4,1289140
: 2

log. b = 2,0644570 (§. 36. Nr. 2)

3. Folglich b = 116.

4. Nun nehme man aus A auf der Seite AF vom Vierecke die Linie AC = b, und ziehe durch C unter dem gegebenen Winkel C die Linie CB, so ist ACB das verlangte Dreyeck.

§. 38.

Aufgabe:

Man soll von einer geradlinigten Figur ADEF (Fig. 10) ein Dreyeck vom gegebenen Inhalte so abschneiden, daß solches seine Spitze in A hat, und die Grundlinie die Seite AF in einem gegebenen Puncte C durchschneidet.

I. Auflösung:

1. Vom Dreyecke ist dessen Inhalt = △, ferner der Winkel A, und die anliegende Seite b = AC gegeben, mithin ist

$$\frac{b^2}{\triangle 2}$$

2. cot. $C = \frac{b^2}{2\Delta} - \cot. A$ (§. 32. III. Zuf.)

3. Man ziehe also durch C unter diesem gefundenen Winkel die Linie CB, so schneidet solche das verlangte Dreyeck ab.

II. Auflösung:

4. Aus den bekannten Stücken Nr. 1 wird

5. $c = \frac{2\Delta}{b \sin. A}$ (§. 34. II. Zus.)

6. Man nehme also aus A auf der Seite AD des Viereckes die Linie $AB = c$, und ziehe die gerade Linie BC, so erhält man das verlangte Dreyeck.

I. Zusatz: Sollte man von einer gegebenen Figur ADEF ein Dreyeck vom gegebenen Inhalte aus E so abschneiden, daß es seine Spitze in einem gegebenen Puncte H innerhalb der Figur habe, und auf der Seite DE stehe, so ist wieder nebst dem Flächeninhalte Δ, die Seite $EH = g$, und der anliegende Winkel GEH oder kürzer E gegeben; man kann also entweder nach der I. Auflösung verfahren, und den Winkel H suchen, oder die Seite $GE = h$ nach der II. Auflösung bestimmen, es ist nemlich

$$\cot. H = \frac{g^2}{2\Delta} - \cot. E; \text{ und } h = \frac{2\Delta}{g \sin. E}.$$

II. Zusatz: Wenn man ein Dreyeck vom gegebenen Inhalte so abschneiden soll, daß solches die Seite AD = c zur Grundlinie hat, und seine Spitze irgendwo in der Seite AF liegt, so ist wieder

$d = \frac{2\Delta}{c \sin. A}$; man nehme daher aus A auf AF die Linie AC = d, ziehe CD, so ist CAD das verlangte Dreyeck.

§. 39.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Man soll vom Vierecke ADEF (Fig. 10), dessen Winkel $A = 79°58'27''$ gegeben ist, ein Dreyeck abschneiden, dessen Inhalt $\Delta = 10109{,}23$ □Fuß beträgt, und welches seine Spitze in A hat, und die Grundlinie die Seite AF in C so schneidet, daß

$AC = b = 116$ hält.

I. Auflösung:

1. $\log. b = 2{,}0644580$

$\log. b^2 = 4{,}1289160$

compl. dec. log. 2 = 9,6989700 — 10

c dec. log. Δ = 5,9952819 — 10

$\log. \frac{b^2}{2\Delta}$ = 19,8231679 — 20

= 0,8231679 — 1, also

2. $\frac{b^2}{2\Delta} = 0{,}6655304$ (§. 246. Arithm.)

3. cot. A = 0,1770619; folglich

4. cot. C = 0,4884685 (§. 38. Nr. 2), und

5. der Winkel C = 63°58′2″.

6. Nun ziehe man durch C unter diesem Winkel die gerade Linie CB, so erhält man das verlangte Dreyeck ACB.

II. Auflösung:

7. log. 2 = 0,3010300
log. Δ = 4,0047181
c. dec. log. b = 7,9355420 — 10
c. dec. log. sin. A = 0,0066832 (§. 8. V. Aufl.)

mithin log. c = 2,2479733 (§. 38. Nr. 5), folglich

8. c = 177.

9. Man nehme aus A auf der Seite AD die Linie AB = c, und ziehe nun die Linie BC, so giebt solche das verlangte Dreyeck ABC.

II. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Flächeninhaltes eines Vierecks zu seinen Seiten und Winkeln.

Vorerinnerung.

In diesem und folgendem Abschnitte bezeichnen die großen Buchstaben A, B, C u. s. f. die Winkel, und die kleinern a, b, c der Ordnung nach die anliegenden Seiten; ferner Tetr., Trap., Polyg. drücken den Flächeninhalt eines gegebenen Viereckes, Trapezes, und Polygons aus.

§. 40.

Lehrsatz:

Im Vierecke ABCD (Fig. 5), wenn die Diagonalen AC, BD den Winkel E einschliessen, so ist

Tetrag, $= \frac{1}{2}$ AC . BD sin. E.

Beweis:

1. Man ziehe aus zwey gegenüberstehenden Ecken A, C auf die Diagonal BD die Perpendikel AF, CG;

2. setze ferner $AE = x$, mithin $CE = AC - x$, so ist

3. $AE : AF = 1 : \sin. E$; das ist

$x : AF = 1 : \sin. E$, mithin

$AF = x \sin. E.$

4. $CE : CG = 1 : \sin. E$, oder

$AC - x : CG = 1 : \sin. E$, also

$CG = AC \sin. E - x \sin. E.$

5. Endlich ist $\triangle BAD = \frac{1}{2} BD . AF = \frac{1}{2} BDx \sin. E$;

$\triangle BCD = \frac{1}{2} BD . CG = \frac{1}{2} BD . AC \sin. E$

$- \frac{1}{2} BDx \sin. E$, folglich

6. Tetrag. $= \triangle BAD + \triangle BCD = \frac{1}{2} BD . AC \sin. E.$

I. Zusatz: Für das Viereck (Fig. 6) mit einem erhabenen Winkel A, wenn man $AE = x$; also $CE = AC + x$ setzet, wird

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} BD . CG = \frac{1}{2} BD . AC \sin. E + \frac{1}{2} BD \, x \sin. E,$$

$$\triangle BAD = \frac{1}{2} BD . AF = \frac{1}{2} BD \, x \sin. E,$$

also wieder

$$\text{Tetrag.} = \triangle BCD - \triangle BAD = \frac{1}{2} BD . AC \sin. E.$$

II. Zusatz: Aus den beyden Diagonalen, nebst dem Winkel, den sie einschließen, ist der Flächeninhalt eines Viereckes gegeben, und

III. Zusatz: Wenn in einem Vierecke von obigen 4 Stücken 3 gegeben sind, so läßt sich das vierte finden. Denn

$$BD = \frac{2 \text{ Tetrag.}}{AC . \sin. E}; \quad AC = \frac{2 \text{ Tetrag.}}{BD . \sin E};$$

$$\text{Fn. E} = \frac{2\ \text{Tetrag.}}{BD \cdot AC}.$$

§. 41.

Lehrsatz:

Im Vierecke ABCD (Fig. 5.) ist der Flächeninhalt, oder

$$\text{Tettag.} = \frac{a \sin. A}{2 \sin. (A + \beta)} (b \sin. \alpha + a \sin. \beta).$$

Beweis:

1. Im Dreyecke BAD ist:
   $AB : BD = \sin. \gamma : \sin. A$, mithin

2. $BD = \frac{a \sin. A}{\sin. \gamma} = \frac{a \sin. A}{\sin. (A + \beta)}$ (§. 15. I. Zus.)

3. Nun ziehe man aus A und C auf die Diagonal CBD die Perpendikel AF, CG, so ist

4. $AF = a \sin. \beta$, und $CG = b \sin. \alpha$, mithin

5. $\triangle BAD = \frac{1}{2} BD \cdot AF$
   $\triangle BCD = \frac{1}{2} BD \cdot CG$. folglich

6. $\text{Tetrag.} = \triangle BAD + \triangle BCD$
   $= \frac{1}{2} BD (AF + CG)$
   $= \frac{a. \sin. A}{2 \sin. (A + \beta)} (a \sin. \beta + b \sin. \alpha)$
   (Nr. 2, 4).

Zusatz:

Zusatz: Wenn im Vierecke ABCD ein Winkel A, und die beyden darauf folgenden Seiten a, b nebst den beyden Winkeln α, β, welche die Diagonal mit obigen Seiten einschliesset, gegeben sind, so ist der Flächeninhalt des Viereckes selbst gegeben.

§. 42.

Lehrsatz:

Im Viercke ABCD (Fig. 11) ist der Flächeninhalt, oder

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \sin. C}{\sin. D}\left(\frac{b \sin. (C+D)}{2} + a \sin. A\right) + \frac{a^2 \sin. A \sin. (A+D)}{2 \sin. D}.$$

Beweis:

1. Man ziehe BE zu AD, EF zu BA parallel, so ist

2. $EF = AB = a$; $\varepsilon = D$; $F = A$.

2. Ferner ziehe man aus C und E auf AD die Perpendikel CG, EI; so ist $EI = HG$.

4. Im Dreyecke BCE ist:

$$BC : BE = \sin. \varepsilon : \sin. C, \text{ oder}$$

$$b : BE = \sin. D : \sin. C, \text{ mithin}$$

5. $$BE = \frac{b \sin. C}{\sin. D}.$$

6.

6. Im Dreyecke BCH ist

BC : CH = 1 : sin. β; nun ist aber

sin. β = sin. (C + ε) (§. 15. I. Zusatz)

= sin. (C + D), also

b : CH = 1 : sin. (C + D), mithin

7. CH = b sin. (C + D), folglich

8. $\triangle BCE = \frac{1}{2} BE \cdot CH = \frac{b \sin. C}{\sin. D} \cdot \frac{b \sin (C+D)}{2}$.

9. Im Dreyecke EIF ist:

EF : EI = 1 : sin. F, das ist (Nr. 2)

a : EI = 1 : sin. A, mithin

10. EI = HG (Nr. 3) = a sin. A.

11. Ferner im Dreyecke EFD

EF : FD = sin. D : sin. o = sin. D : sin. (F + D),

oder

a : FD = sin. D : sin. (A + D) (Nr. 2),

mithin

12. $FD = \frac{a \sin. (A + D)}{\sin. D}$; folglich

13. Parallelgr. BF = BE, $HG = \frac{b \sin C}{\sin. D} \cdot a \sin. A$

(Nr. 5 und 10)

14. $\triangle EFD = \frac{1}{2} FD \cdot EI = \frac{a \sin. (A+D)}{2 \sin. D} \cdot a \sin. A$,

folglich

15. Tetragon. = $\triangle$BCE + Parallel. BF + $\triangle$EFD

$$= \frac{b \sin. C}{\sin. D}\left(\frac{b \sin. (C+D)}{2} + a \sin. A\right)$$

$$+ \frac{a^2 \sin. A \sin. (A+D)}{2 \sin. D} \text{ (Nr. 8, 13 u. 14).}$$

I. Zusatz: Aus zwey auf einander folgenden Seiten a, b, und den drey Winkeln A, C, D ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

II. Zusatz: Aus dem Flächeninhalt eines Viereckes, und den drey Winkeln A, C, D, nebst einer der beyden Seiten a oder b läßt sich die andere finden. Denn

$$\text{Tetrag.} = \frac{b^2 \sin. C \sin. (C+D)}{2 \sin. D}$$

$$+ \frac{a\,b \sin. A \sin. C}{\sin. D} + \frac{a^2 \sin. A \sin. (A+D)}{2 \sin. D}$$

(Lehrsatz).

$$2 \text{ Tetrag. } \sin. D - b^2 \sin. C \sin. (C+D)$$

$$= a^2 \sin. A \sin. (A+D) + 2b \sin. A \sin. C . a;$$

$$\frac{2 \text{ Tetr. } \sin. D - b^2 \sin. C \sin. (C+D)}{\sin. A \sin. (A+D)}$$

$$= a^2 + \frac{2b \sin. C}{\sin. (A+D)} a; \text{ folglich}$$

$$a = -\frac{b \sin. C}{\sin (A+D)} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \text{ Tetr. } \sin. D - b^2 \sin. C \sin. (C+D)}{\sin. A \sin. (A+D)}\right.} +$$

$$+ \frac{b^2 \sin. C^2}{\sin. (A+D)^2}\Big) \text{ (§. 159, Arithm.)}$$

III. Zusatz: Wenn BC mit AD parallel, also b # d, so ist sin. (C + D) = 0; sin. C = sin. D, folglich

$$\text{Trapez.} = a\,b \sin. A + \frac{a^2 \sin. A \sin. (A+D)}{2 \sin. D};$$

und

IV. Zusatz:

$$a = -\frac{b \sin. C}{\sin.(A+D)} \pm \sqrt{\Big(\frac{2 \text{ Trapez. } \sin. C}{\sin. A \sin. (A+D)} + \frac{b^2 \sin. C^2}{\sin. (A+D)^2}\Big)}$$

§. 43.

Lehrsatz:

Im Vierecke ABCD (Fig. 12) ist

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{4}\,[d^2 \sin. 2D + b^2 \sin. 2C - 2 \cot. (A+D)\, d^2 \sin. D^2 - b^2 \sin. C^2)]$$

Beweis:

1. Man ziehe aus A und B auf die Seite CD die Perpendikel BF, AE, und auf letztere aus B das Loth BG, so ist

2. BF = GE.

3. Im rechtwinklichten Dreyecke AED:
AD : AE = 1 : sin. D; also AE = d sin. D;
AD : DE = 1 : cos. D; also DE = d cos. D,
mithin

4. $\triangle AED = \frac{1}{2}$ DE . AE $= \frac{1}{2} d^2$ sin. D . cos. D
$= \frac{1}{4} d^2$ sin. 2 D (§. 306. I. Zusatz, Trigonometrie.)

5. Im rechtwinklichten Dreyecke BCF:
BC : BF = 1 : sin. C; also BF = b sin. C;
BC : CF = 1 : cos. C; also CF = b cos. C;
mithin

6. $\triangle BCF = \frac{1}{2}$ CF . BF $= \frac{1}{2} b^2$ sin. C cos. C
$= \frac{1}{4} b^2$ sin. 2 C.

7. AG = AE — GE = AE — BF (Nr. 2.)
= d sin. D — b sin. C (Nr. 3 u. 5).

8. Ferner α = A — β = A — (R — D)
= A + D — R, folglich
tang. α = — cot. (A + D) (§. 286 und 303. I. Zuf. Trigon.)

9. Nun ist im Dreyecke ABG:
AG : BG = 1 : tang. α, das ist:
d sin. D — b sin. C : BG = 1 : tang. α (Nr. 7);
mithin
BG = (d sin. D — b sin. C) tang. α
= — (d sin. D — b sin. C) cot. (A + D)
(Nr. 8.)

10. Trapez. AF $=$ (AE $+$ BF) $\frac{1}{2}$ BG (§. 152, Geometrie).

$=$ (d sin.D $+$ b sin. C) $\times$ $-\frac{1}{2}$(d sin.D $-$ b sin.C) cot.(A $+$ D)
(Nr. 3, 5 und 9)

$= -\frac{1}{2}$ cot. (A $+$ D) (d^2 sin. D^2 $-$ b^2 sin. C^2)
(§. 103, Zuſ. Arithm.)

11. Tetrag. $=$ $\triangle$AED $+$ $\triangle$BCF $+$ Trapez. AF,
mithin aus Nr. 4, 6 u. 10.

$= \frac{1}{4}$ d^2 sin. 2 D $+$ $\frac{1}{4}$ b^2 sin. 2 C
$-\frac{1}{2}$ cot. (A $+$ D) (d^2 sin. D^2 $-$ b^2 sin. C^2)

$= \frac{1}{4}$ [d^2 sin. 2 D $+$ b^2 sin. 2 C
$-$ 2 cot. (A $+$ D) (d^2 sin. D^2 $-$ b^2 sin. C^2)]

I. Zuſatz: Aus 2 gegenüber ſtehenden Seiten b, d und den 3 Winkeln A, C, D iſt der Flächeninhalt eines Viereckes gegeben.

II. Zuſatz: Wenn b $\#$ d, ſo iſt sin. C $=$ sin. D, ferner C $=$ 2R $-$ D, alſo 2 C $=$ 4R $-$ 2D, mithin sin. 2 C $=$ $-$ sin. 2D (§. 292. IV. und IX. Zuſatz, Trigon.), folglich

Trapez. $=$ $\frac{1}{4}$ [d^2 sin. 2 D $-$ b^2 sin. 2 D $-$ 2 cot (A $+$ D)
(d^2 sin. D^2 $-$ b^2 sin. D^2)]

$= \frac{d^2 - b^2}{4}$ (sin. 2D $-$ 2 cot. (A $+$ D) sin. D^2).

§. 44.

Lehrſatz:

Im Vierecke ABCD (Fig. 11) iſt

$$\text{Tetrag.} = \frac{b \sin. C}{2 \sin. D} [b \sin. (C + D) + a \sin. A] + a d \sin. A.$$

Beweis:

1. Man ziehe durch B zu AD die Parallele BE, und durch E zu BA die Parallele EF, ferner aus C und E auf AD die Perpendikel CG, EI, so ist

2. $\varepsilon = D$; $EF = a$; $F = A$; $EI = HG$.

3. Im Dreyecke BCE ist

$BE : BC = \sin. C : \sin. \varepsilon$, mithin

$$BE = \frac{b \sin. C}{\sin. \varepsilon} = \frac{b \sin. C}{\sin. D}.$$

4. Im rechtwinklichten Dreyecke BCH;

$BC : CH = 1 : \sin. \beta = 1 : \sin. (C + \varepsilon)$

$= 1 : \sin. (C + D)$,

mithin $CH = b \sin. (C + D)$; folglich

$$5. \quad \triangle BCE = \tfrac{1}{2} BE \cdot CH = \frac{b \sin. C}{2 \sin. D} b \sin. (C + D.)$$

6. Im rechtwinklichten Dreyecke EIF:

$EF : EI = 1 : \sin. F$, mithin

$HG = EI = EF \sin. F = a \sin. A$ (Nr. 2), also

7. Trapez. $BD = (AD + BE)\ \frac{1}{2}\ HG$

$$= \left(d + \frac{b \sin. C}{\sin. D}\right) \frac{1}{2}\ a \sin. A$$

$$= \frac{1}{2}\ a\ d \sin. A + \frac{b \sin. C}{2 \sin. D}\ a \sin. A;$$

folglich

8. Tetrag. $=$ $\triangle BCE$ $+$ Trapez. BD

$$= \frac{b \sin. C}{2 \sin. D}\ (b \sin. (C + D) + a \sin. A)$$

$+ \frac{1}{2}\ a\ d \sin. A$ (Nr. 5 und 7.)

I. Zusatz: Durch drey Seiten a, b, d und den drey Winkeln A, C, D ist der Inhalt eines Viereckes gegeben.

II. Zusatz: Wann $b \neq d$, also $\sin. C = \sin. D$, und $\sin. (C + D) = o$, so ist

$$\text{Trapez.} = \frac{1}{2}\ a\ b \sin. A + \frac{1}{2}\ a\ d \sin. A.$$

$$= \frac{1}{2}\ a \sin. A\ (b + d); \text{ ferner}$$

$$\text{die Seite } a = \frac{2 \text{ Trapez.}}{(b+d) \sin. A}.$$

§. 45.

Lehrsatz:

Im Vierecke (ABCD (Fig. 13) ist der Flächeninhalt oder Tetrag. $= \frac{1}{2}\ d\ (a \sin. A + c \sin. D)$

$+ \frac{1}{2}\ a\ c \sin. (A + D)$.

Beweis:

Beweis:

1. Man fälle aus B auf die Seite d den Perpendikel BE, und auf diesen aus C das Loth CF, endlich auf letzteres aus D die senkrechte Linie DG, so ist

2. Im rechtwinklichten Dreyecke ABE:
AB : BE = 1 : sin. A, mithin BE = a sin. A.
Ferner AB : AE = 1 : cos. A, mithin AE = a cos. A,
also

3. $\triangle ABE = \frac{1}{2}$ BE . AE $= \frac{1}{2}$ a^2 sin. A cos. A;
und

4. DE = AD — AE = d — a cos. A.

5. Im rechtwinklichten Dreyecke DCG ist
δ = D — R; mithin sin. δ = — cos. D, und
cos. δ = sin. D;
ferner CD : CG = 1 : sin. δ; also
CG = c sin. δ = — c cos. D
CD : DG = 1 : cos. δ; mithin
DG = c cos. δ = c sin. D.

6. BF = BE — FE = BE — DG = a sin. A
— c sin. D. (Nr. 2 u. 5)

7. CF = FG + CG = ED + CG = d
— a cos. A — c cos. D (Nr. 4 und 5), folglich

8. $\triangle BFC = \frac{1}{2}$ CF . BF $= \frac{1}{2}$ (d—a cos. A—c cos. D)
(a sin. A — c sin. D)

$= \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$ (a d sin. A — a^2 sin. A cos. A
— a c sin. A cos. D — c d sin. D
+ a c cos. A sin. D + c^2 sin. D cos. D).

9. Trapez. EC $= \frac{1}{2}$ (CF + DE) DG
$= \frac{1}{2}$ (d — a cos. A — c cos. D + d
— a cos. A) c sin. D
$= \frac{1}{2}$ (2 c d sin. D — 2 a c cos. A sin. D
— c^2 sin. D cos. D), folglich

10. Tetrag. = △ABE + △BFC + Trapez. EC
aus Nr. 3, 8 und 9
$= \frac{1}{2}$ [a^2 sin. A cos. A + a d sin. A
— a^2 sin. A cos. A — a c sin. A cos. D
— c d sin. D + a c cos. A sin. D
+ c^2 sin. D cos. D + 2 c d sin. D
— 2ac cos. A sin. D — c^2 sin. D cos. D]
$= \frac{1}{2}$ [a d sin. A — a c (sin. A cos. D
+ cos. A sin. D) + c d sin. D]
$= \frac{1}{2}$ d [a sin. A + c sin. D]
— $\frac{1}{2}$ a c sin. (A+D) (§. 306, Trig.)

Zusatz: Aus drey Seiten a, c, d und den beyden eingeschlossenen Winkeln A, D ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

§. 46.

Lehrsatz:

Im Viereck ABCD (Fig. 14) ist dessen Flächeninhalt oder

$$\text{Tetrag.} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{-a \sin.(C+D+A)}{\sin. C}\right.$$

$$\left.(d \sin. d - a \sin.(A+D)) + c d \sin. D\right)$$

Beweis:

1. Man ziehe aus A zur Seite c die Parallele AE, ferner aus B auf c das Loth BF, endlich aus D auf AE die senkrechte DH, so ist

2. $\varepsilon = C$; ferner $\gamma + D = 2R$, mithin

$$\sin. \gamma = \sin. D;$$

$$\alpha = A + \gamma = A + (2R - D)$$

$$= A + D - 2R, \text{ also}$$

$$\sin. \alpha = -\sin.(A+D).$$

3. Im rechtwinklichten Dreyecke AGB

$$AB : BG = 1 : \sin. \alpha; \text{ mithin } BG = a \sin. \alpha$$

$$= -a \sin.(A+D).$$

4. Im Dreyecke ABE

$$AB : AE = \sin. \varepsilon : \sin. B, \text{ mithin}$$

$$AE = \frac{a \sin. B}{\sin. \varepsilon} = \frac{-a \sin.(C+D+A)}{\sin. C}$$

(Nr. 2 und §. 15. II. Zus.), folglich

5. $$\Delta ABE = \tfrac{1}{2} AE \cdot BG$$

$$= \tfrac{1}{2} \times \frac{-a \sin.(C+D+A)}{\sin. C} \cdot$$

$$\times -a \sin.(A+D)$$

6. Im rechtwinklichten Dreyecke AHD
AD : DH = 1 : sin. γ, mithin
DH = d sin. γ = d sin. D (Nr. 2), also

7. Trapez. AC = $\frac{1}{2}$ (AE + CD) DH
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\text{a sin. (C+D+A)}}{\text{sin. C}} + \text{c}\right)$$
d sin. D, folglich

8. Tetrag. = $\triangle$ABE + Trapez, AC
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\text{a sin. (C + D + A)}}{\text{C}}\right.$$
$$\left.(\text{d sin. D} - \text{a sin. (A + D)}) + \text{c d sin. D}\right)$$

Zusatz: Aus drey Winkeln A, C, D und ihren anliegenden Seiten a, c, d ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

§. 47.

Lehrsatz:

Im Vierecke ABCD (Fig. 5) ist der Inhalt, oder Tetrag. = $\frac{1}{2}$ (a d sin. A + b c sin. C).

Beweis:

1. Man ziehe die Diagonal BD, so ist
2 $\triangle$BAD = $\frac{1}{2}$ d a sin. A (§. 34), und eben so
3. $\triangle$BCD = $\frac{1}{2}$ b c sin. C; mithin
4. Tetrag. = $\triangle$BAD + $\triangle$BCD
= $\frac{1}{2}$ (a d sin. A + b c sin. C).

Zusatz:

Zusatz: Aus allen vier Seiten und zwey gegenüberstehenden Winkeln A, C ist der Flächeninhalt des Viereckes gegeben.

§. 48.

Aufgabe:

Den Flächeninhalt einer Figur, von welcher alle Seiten und Winkel gegeben sind, zu finden.

I. Auflösung: (Fig. 9.)

1. Man theile die gegebene Figur durch die gezogenen Diagonalen CG, CE im Vierecke ABCG, CEFG, und bey ungerader Anzahl der Seiten am Ende in das Dreyeck CDE.

2. Nun ist im ersten Vierecke ABCG alles bis auf die Seite CG und ihre beyden anliegenden Winkel bekannt, mithin aus §. 45.

$$\text{Tetrag. ABCG} = \tfrac{1}{2} g\, a \sin. A - \tfrac{1}{2} g\, b \sin. (A+B) + \tfrac{1}{2} a\, b \sin. B.$$

3. Ferner aus §. 20

$$\text{tang. AGC} = \frac{a \sin. A - b \sin. (A+B)}{g - a \cos. A + b \cos. (A+B)}; \text{ und}$$

$$\text{BCG} = 360° - (A + B + \text{AGC}); \text{ endlich}$$

$$\text{CG} = \frac{g - a \cos. A + b \cos. (A+B)}{\cos. (A + B + \text{BCG})}$$

4. Im zweyten Vierecke CEFG ist daher wieder alles bis auf die Seite CE nebst den beyden anlie-

anliegenden Winkeln bekannt, man kann da also wie Nr. 2 und 3 sowohl den Flächeninhalt, als obige Seite und Winkel berechnen.

5. Eben dieses gilt für alle folgende Vierecke, wenn in einer Figur deren mehrere vorhanden sind.

6. Im letzten Dreyecke CDE ist der Winkel D nebst den einschließenden Seiten c, d gegeben, folglich aus §. 34:

$$\triangle CDE = \frac{c\ d\ \text{sin. D}}{2}.$$

7. Addirt man endlich von den einzelnen Vierecken ihren Flächeninhalt zu jenem dieses Dreyeckes, so giebt ihre Summe den ganzen Flächeninhalt der gegebenen Figur.

II. Auflösung: (Fig. 15.)

8. Man vertheile die Figur, indem man durch alle Ecke Parallelen zieht, in Trapezen, wo also die Richtung der ersten Parallele, das ist der Winkel AGG, welchen die erste gezogene Linie mit einer Seite der Figur einschließet, entweder gegeben, oder beliebig angenommen seyn kann.

9. Der Kürze wegen bezeichne man die innern Winkel eines jeden Trapezes, oder Dreyeckes, im Falle im Anfange, oder am Ende der getheilten Figur statt erstern letztere entstehen, durch die

größern Buchstaben, die an ihrem Scheitel stehen, so z. B. für das Dreyeck GAG bezeichnen G, A, G die Winkel desselben.

10. Im ersten Dreyecke GAG sind nun alle Winkel nebst der Seite AG = g gegeben, mithin aus §. 32 nebst dessen Zusätzen ist:

$$\triangle GAG = \frac{g^2 \sin. A \sin. G}{2 \sin. (A + G)};$$

$$AG = V\left(\frac{2 \triangle \sin. (A + G)}{\sin. A \sin. G}\right)$$

$$GG = V\left(\frac{2 \triangle \sin. (G + G)}{\sin. G \sin. G}\right).$$

11. Im Trapeze BG sind nun die beyden Seiten GG, und BG = a — AG; ferner die beyden Winkel G, G, mithin auch ihre Nebenwinkel B, B gegeben, folglich aus §. 42, III. Zusatz:

$$\text{Trapez. } BG = BG \cdot GG \sin. B + \frac{BG^2 \sin. B \sin. (B + B)}{2 \sin. B}$$

12. Ferner aus §. 16

$$GG \sin. G - BG \sin. (G + G) + BB \sin. (G + G + B) = 0, \text{ also}$$

$$BB = \frac{BG \sin. (G + G) - GG \sin. G}{\sin. (G + G + B)}$$

13. Endlich aus §. 44. II. Zusatz:

$$BG = \frac{2 \text{ Trapez. } BG}{(BB + GG) \sin. B}.$$

14. Im folgenden Trapeze BC sind nun wieder die beyden Seiten BB; BC = b nebst den beyden Winkeln B, B gegeben, mithin auch ihre Nebenwinkel C, C bestimmt, woraus sich nach Nr. 11 der Flächeninhalt, und nach Nr. 12 und 13 die beyden unbekannten Seiten CC, BC berechnen lassen.

15. Eben dieses gilt für alle folgende Trapezen.

16. Im letzten Dreyecke DED werden durch die vorhergehenden Auflösungen die Seiten DD, DE, nebst den beyden Winkeln D, D gefunden, folglich sind alle Seiten und Winkel desselben bekannt, und man kann den Flächeninhalt aus §. 32 — 34 suchen.

17. Addirt man nun von den einzelnen Trapezen und Dreyecken ihren Flächeninhalt zusammen, so giebt ihre Summe den gesuchten Inhalt der gegebenen Figur.

§. 49.

Beyspiel zur I. Auflösung der vorhergehenden Aufgabe:

Im Siebenecke ABCDEFGA (Fig. 9) sey
A = 113°23′; B = 84°44′; C = 270°31′;
D = 105°55′; E = 91°37′; F = 114°22′25″;
G = 119°27′35″; ferner die Seiten

a = 361; b = 383; c = 308; d = 400; e = 599;
f = 557,683; g = 531.

Man sucht den Flächeninhalt desselben.

Auflösung:

1. Man ziehe die Diagonalen CG, CE, so wird die Figur in zwey Vierecke AC, GE, und in das Dreyeck CDE getheilt.

2. Im erstern Vierecke AC ist alles ausser der Seite CG nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben, mithin §. 48. I. Aufl.

Tetrag. AC = $\frac{1}{2}$ g a sin. A — $\frac{1}{2}$ g b sin. (A + B)
+ $\frac{1}{2}$ a b sin. B
= 87973,7 + 31619,7 + 68839,6
= 188433

3. tang. AGC = $\frac{a \sin. A - b \sin. (A + B)}{g - a \cos. A + b \cos. (A+B)}$
= $\frac{450,446}{310,261}$ r; folglich

4. Der Winkel AGC = 55°26′29″, und
BCG = 360° — (A+B+AGC) = 106°26′31″.

5. Die Seite CG = $\frac{g - a \cos. A + b \cos. (A+B)}{\cos. (A + B + BCG)}$
= 546,957.

6. Im zweyten Vierecke GE sind nun die Seiten EF = e, FG = f, und CG, ferner die Winkel F und FGC = G — AGC = 64°1′6″ gegeben, mithin ist wieder

7.

7. Tetrag. GE $= \frac{1}{2}$ e f sin. F $- \frac{1}{2}$ e . CG sin. (F + FGC)
$+ \frac{1}{2}$ f . GC sin. FGC
$=$ 152139,6 $-$ 4596,97 $+$ 137100,4
$=$ 284643,03.

8. Man könnte nun wieder die Seite CE nebst den beyden anliegenden Winkeln suchen, wenn noch mehrere folgende Vierecke vorhanden wären, im gegenwärtigen Beyspiele ist dieses nicht nothwendig, da

9. im folgenden Dreyecke CDE zwey Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel unmittelbar gegeben sind, es ist daher

10. $\triangle DEC = \frac{c\,d \sin. D}{2} =$ 59238,36; folglich

11. Hept. ABCDEFGA $=$ Tetrag. AC $+$ Tetrag. GE
$+ \triangle DEC$
$=$ 532314,39 (§. 35).

§. 50.

Beyspiel zur II. Auflösung der vorhergehenden Aufgabe:

Im Siebeneck ABCDEFGA (Fig. 15), dessen Seiten und Winkel die nemlichen, wie im vorhergehenden Beyspiele, sind, nehme man die erste Parallele GG so gezogen an, daß AGG $= 19°27'35''$ hält; nun soll man den Flächeninhalt des Siebeneckes suchen.

Auf-

Auflösung:

1. Im Dreyecke GAG, wenn man die Winkel, so wie bey den folgenden Trapezen, nach §. 48, Nr. 9 bezeichnet, sind die Seite AG = g; die Winkel A, G, also auch G = 180° — (A + G) = 47°9′25″ gegeben, mithin

$$2.\ \Delta GAG = \frac{g^2 \sin. A \sin. G}{2 \sin. (A + G)} = 58794{,}8.$$

$$3.\ \text{Ferner ist } AG = \sqrt{\left(\frac{2\,\Delta \sin. (A + G)}{\sin. A \sin. G}\right)}$$

= 241,264,

$$\text{und } GG = \sqrt{\left(\frac{2\,\Delta \sin. (G + G)}{\sin. G \sin. G}\right)} = 664{,}725.$$

4. Im Trapeze BG sind nun die Seiten BG = a — AG = 119,736; GG; ferner die Winkel G = 119°27′25″ — 19°27′35″ = 100°; also B = 80°; eben so G = 132°50′35″, mithin B = 47°9′25″ gegeben.

5. Trapez. $BG = BG \cdot GG \sin. B + \frac{BG^2 \sin. B \sin. (B + B)}{2 \sin. B}$

= 58358 + 4253,55 = 62611,55

$$6.\ BB = \frac{BG \sin. (G + G) - GG \sin. G}{\sin. (G + G + B)}$$

= 761,615

$$BG = \frac{2 \text{ Trapez. } BG}{(BB + GG) \sin. B} = 89{,}146..$$

7.

7. Im folgenden Trapeze BC sind nun die Seiten BC = b, und BB; ferner alle Winkel, nemlich $B = 84°44' - 47°9'25'' = 37°34'35''$; mithin $C = 142°25'25''$, ferner $\mathfrak{B} = 100°$; also $\mathfrak{C} = 80°$ gegeben; folglich

8. Trapez. $B\mathfrak{C} = b \,.\, B\mathfrak{B} \sin. C + \frac{b^2 \sin. C \sin. (C + \mathfrak{C})}{2 \sin. \mathfrak{C}}$

$= 177883,2 - 30638,5$

$= 147244,7$

9. Ferner ist:

$$C\mathfrak{C} = \frac{b \sin. (\mathfrak{B} + B) - B\mathfrak{B} \sin. \mathfrak{B}}{\sin. (\mathfrak{B} + B + C)} = 499,255$$

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \frac{2 \text{ Trap. } B\mathfrak{C}}{(B\mathfrak{B} + C\mathfrak{C}) \sin. \mathfrak{C}} = 237,163$$

10. Im Trapeze CF sind daher die Seiten C$\mathfrak{C}$, und $\mathfrak{C}F = f - (\mathfrak{B}G + \mathfrak{B}\mathfrak{C})$ 231,274; ferner die Winkel $C = 270°31' - 142°25'25'' = 128°5'35''$; also $\mathfrak{F} = 51°54'25''$; und $\mathfrak{C} = 100°$, mithin $F = 80°$ gegeben, daher

11. Trapez. $CF = \mathfrak{C}F \,.\, C\mathfrak{C} \sin. F + \frac{\mathfrak{C}F^2 \sin. F \sin. (F + \mathfrak{F})}{2 \sin. \mathfrak{F}}$

$= 113757 + 24927,45$

$= 138684,45$

12. Ferner $FF = \frac{CF \sin.(C + C) - CC \sin. C}{\sin.(C + C + F)}$

$= 718{,}052$

und $CF = \frac{2 \text{ Trapez. } CF}{(CC + FF) \sin. F} = 289{,}519$

13. Im Trapeze FD sind also die Seiten FF und und $FD = c - CF = 18{,}481$; ferner die Winkel $F = 128°5'35''$, mithin $D = 51°54{,}25''$, und $F = 114°22'25'' - 80° = 34°22'25''$, also $D = 145°37'35''$, mithin

14. Trapez. $FD = DF \cdot FF \sin. D + \frac{DF^2 \sin. D \sin.(D + D)}{2 \sin. D}$

$= 10443{,}9 - 71{,}72 = 10372{,}18$

15. $DD = \frac{DF \sin.(F + F) - FF \sin. F}{\sin.(F + F + D)}$

$= 708{,}191$

$FD = \frac{2 \text{ Trapez. } DE}{(FF + DD) \sin. F} = 25{,}762.$

16. Im Dreyecke DED sind alle Seiten $DE = d$, DD, und $ED = e - FD = 573{,}238$, und alle Winkel E, $D = 105°55' - 51°54'25'' = 54°0'35''$, und $D = 34°22'25''$, folglich

17. $\triangle DED = \frac{d \cdot ED \sin. E}{2}$ (§. 34), oder

$= \frac{u}{4}$ (§. 34, V. Zuf.) $= 114602$

18.

18. Nun ist △GAG = 58794,8 (Nr. 2)
Trapez. BG = 62611,55 (Nr. 5)
Trapez. BC = 147244.7 (Nr. 8)
Trapez. CF = 138684,45 (Nr. 11)
Trapez. FD = 10372,18 (Nr. 14)
△DED = 114602,0 (Nr. 17), folglich
Hept. ABCDEFGA = 532309,68

§. 51.

Aufgabe:

Man soll von einer Figur BCEF (Fig. 16), deren Seite BC, nebst den beyden anliegenden Winkeln B, C gegeben ist, ein Viereck BD von bestimmter Größe so abschneiden, daß dessen vierte Seite mit BF einen gegebenen Winkel A einschliesset.

Auflösung:

1. Von dem abzuschneidenden Vierecke BD sind dessen Flächeninhalt, die Seite BC, nebst den drey Winkeln A, B, C mithin auch $D = 360° - (A+B+C)$ gegeben.

2. Der Kürze wegen bezeichne man wieder die obigen Winkeln anliegenden Seiten AB, BC, CD, DA der Ordnung nach mit den kleinern Buchstaben a, b, c, d, so ist aus §. 42, II. Zusatz.

3. $a^2 = \frac{b \sin. C}{\sin. (A+D)}$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2\,\text{Tetr. BD} \cdot \sin. D - b^2 \sin. C \sin.(C+D)}{\sin. A \cdot \sin.(A+D)} + \frac{b^2 \sin. C^2}{\sin.(A+D)^2}\right)}$$

4. Für $A+D < 2R$, wo also $\sin.(A+D)$ positiv, mithin $-\frac{b \sin. C}{\sin.(A+D)}$ negativ wird, muß man bey der Wurzelgröße das Zeichen + nehmen, weil sonst a negativ würde; wenn aber $A+D > 2R$, also $-\frac{b \sin. C}{\sin.(A+D)}$ positiv wird, so muß man bey der Wurzelgröße das Zeichen — nehmen, welches sich bey der Anwendung allemal leicht einsehen läßt.

5. Man nehme also aus B auf der Seite BF der gegebenen Figur die Linie $BA = a$, und ziehe unter dem gegebenen Winkel A die Linie AD, so erhält man das verlangte Viereck.

Zusatz: Soll man hingegen aus der gegebenen Seite $BC = b$, den anliegenden Winkeln B, C ein Trapez BD vom gegebenen Inhalte abschneiden, so sind in diesem Falle wieder die beyden Winkel A, D als Nebenwinkel der vorigen bekannt, und es bleibt die ganze vorige Auflösung, nur ist

$$a = -\frac{b \sin. C}{\sin.(A+D)} \pm \sqrt{\left(\frac{2\,\text{Trap. BD} \sin. C}{\sin. A \sin.(A+D)} + \frac{b^2 \sin. C^2}{\sin.(A+D)^2}\right)}$$ (§. 42, IV. Zusatz).

§. 52.

§. 52.

I. Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Vom Vierecke BCEF (Fig. 16), dessen Seite BC = 195 F, und die Winkel B = 80°7′, C = 88°2′ bekannt sind, soll man ein anders von 20000 □F. so abschneiden, daß dessen vierte Seite mit BF den Winkel A = 90° einschliesset.

Auflösung:

1. $D = 360° - (A + B + C) = 101°51'$, mithin $\sin. D = \sin. 78°,9'$, ferner $A + D = 191°51'$, also $\sin. (A + D) = -\sin. 11°51'$, endlich $C + D = 189°53'$; folglich $\sin. (C + D) = -\sin. 9°53'$.

2. Bestimmt man nun die einzelnen Glieder der Gleichung §. 51, Nr. 3, so wird

3. $a = 949{,}04 \pm \sqrt{[-190638 - 31764{,}6 + 900673]}$
$= 949{,}04 - \sqrt{678270{,}40}$
$= 949{,}04 - 823{,}57 = 125{,}47$.

4. Man nehme nun aus B auf der Seite BF die Linie $BA = a = 125{,}47$ F., und ziehe durch A den Perpendikel AD, so erhält man das verlangte Viereck BD.

II. Beyspiel:

Vom Vierecke BCEF (Fig. 17), dessen Seite BC = 195 F. die Winkel B = 80°7′, C = 88°2′

gegen

gegeben sind, soll man das Trapez BD = 20000 □F. abschneiden.

Auflösung:

1. In diesem Falle ist AD # BC, also A = 99°53′ und D = 91°58′, mithin A + D = 191°51′, und sin. (A + D) = — sin. 11°51′; ferner sin. D = sin. C.

2. Berechnet man nun die einzelnen Glieder der Gleichung §. 51, Zusatz, so ist

3. $a = 949{,}04 \pm \sqrt{[-197607{,}1 + 900673]}$
$= 949{,}04 - \sqrt{703065{,}90}$
$= 949{,}04 - 838{,}49 = 110{,}55.$

4. Man nehme also aus B auf BF die Linie BA = 110,55, und ziehe durch A zur Seite BC die Parallele AD, so ist

5. BD das verlangte Trapez.

§. 53.

Aufgabe:

Von einer gegebenen Figur (Fig. 16), deren Seite BC, sowohl, als die anliegenden Winkel B, C bekannt sind, ein Viereck BD vom gegebenen Inhalt, so abzuschneiden, daß dessen Seite durch einen gegebenen Punct A der Seite BF gehet.

1. Auf-

I. Auflösung:

1. Von dem Vierecke BD sind nebst dem Flächeninhalte, die beyden Winkel B, C, und Seiten $BC = b$, $BA = a$ gegeben.

2. Ferner ist §. 42.

$$\text{Tetrag. BD} =$$
$$[b^2 \sin. C \sin. (C + D) + 2 a b \sin. A \sin. C + a^2 \sin. A \sin. (A + D)] : 2 \sin. D$$
$$2 \text{ Tetrag. BD} \sin. D = a^2 \sin. A \sin. (A + D) + 2 a b \sin. A \sin. C + b^2 \sin. C \sin. (C + D);$$
$$a^2 \sin. (A+D) + 2 a b \sin. C = \frac{2 \text{ Tetr. BD} \sin. D}{\sin. A} - \frac{b^2 \sin. C \sin. (C + D)}{\sin. A}$$

3. Nun ist $A + D = 4R - (B+C)$, also
$\sin. (A+D) = -\sin. (B+C)$; eben so
$\sin. (C+D) = -\sin. (A+B)$;
$\sin. D = -\sin. (A + B + C)$.

4. Man setze diese Werthe in letztere Gleichung, so ist:

$$2 ab \sin. C - a^2 \sin. (B+C) = \frac{b^2 \sin. C \sin. (A+B)}{\sin. A} - \frac{2 \text{ Tetrag. BD} \sin. (A+B+C)}{\sin. A}$$
$$= \frac{b^2 \sin. C \sin. A \cos. B}{\sin. A} + \frac{b^2 \sin. C \cos. A \sin. B}{\sin. A}$$

$$- \frac{2 \text{ Tetr. BD fin. A cos. } (B + C)}{\text{fin. A}}$$

$$- \frac{2 \text{ Tetrag. BD cos. A fin. } (B + C)}{\text{fin. A}}$$

(§. 306, Trigonometrie)

$= b^2$ fin. C cos. B $+ b^2$ fin. C fin. B cot. A

— 2 Tetr. BD cos. (B + C)

— 2 Tetr. BD fin. (B + C) cot. A (§. 303, Trigon.), mithin

5. $2ab \text{ fin. } C - a^2 \text{ fin. } (B+C) + 2 \text{ Tetr. BD cos. } (B+C)$
$- b^2 \text{ fin. } C \text{ cos. } B = \text{cot. } A \; [b^2 \text{ fin. } C \text{ fin. } B$
$- 2 \text{ Tetr. BD fin. } (B + C)]$; folglich

6. cot. A =

$[2ab \text{ fin. } C - a^2 \text{ fin. } (B + C)$
$+ 2 \text{ Tetr. BD cos. } (B+C) - b^2 \text{ fin. } C \text{ cos. } B]:$
$[b^2 \text{ fin. } C \text{ fin. } B - 2 \text{ Tetr. BD fin. } (B+C)]$.

7. Aus dieser Gleichung läßt sich also der Winkel A finden, man ziehe daher durch A unter diesem Winkel die Linie AD, so schneidet solche das verlangte Viereck BD ab.

II. Auflösung:

8. Tetrag. BD $= \frac{1}{2} ab \text{ fin. } B - \frac{1}{2} ac \text{ fin. } (B + C)$
$+ \frac{1}{2} bc \text{ fin. } C$ (§. 45), also

9. $2 \text{ Tetrag. BD} - ab \text{ fin. } B = c \; (b \text{ fin. } C$
$- a \text{ fin. } (B + C))$, und

10. $c = \frac{2 \text{ Tetrag. } BD - ab \sin. B}{b \sin. C - a \sin. (B + C)}$

11. Man nehme nun aus C auf der Seite CE die Linie CD = c, ziehe die gerade DA, so schneidet solche das Verlangte Viereck BD ab.

§. 54.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe:

Vom Vierecke BCEF (Fig. 16), dessen Seite BC = 195 Fuß, die anliegenden Winkel $B = 80°7'$, $C = 88°2'$ gegeben sind, ein anderes Viereck BD von 20000 □Fuß so abzuschneiden, daß die Seite DA durch den gegebenen Punct A, wo BA = 125,47 Fuß ist, gehet.

I. Auflösung:

1. $B + C = 168°9'$, mithin $\sin. (B + C) = \sin. 11°51'$, und $\cos. (B + C) = -\cos. 11°51'$.

2. Wenn man nun alle einzelne Glieder der Gleichung §. 53, Nr. 6 berechnet, so ist

3. $\cot. A = \frac{48904,5 - 3232,77 - 39147,5 - 6522,86}{37438,6 - 8214,01} + r$

$= \frac{1,37}{29224,59} = 0$ beynahe, folglich

4. Der Winkel $A = 90°$ (§. 303, I. Zusatz, Trigonometrie).

5.

5. Man ziehe nun unter diesem Winkel durch den gegebenen Punct A die Linie AD, so schneidet diese das verlangte Viereck BD ab.

II. Auflösung:

6. Berechnet man die Glieder der Gleichung §. 53. Nr. 10; so wird

$$7.\quad c = \frac{40000 - 24103{,}5}{194{,}9 - 25{,}77} = \frac{15896{,}5}{169{,}13}$$

$$= 94.$$

8. Man nehme also aus C auf der Seite CE die Linie CD = c = 94 F.; ziehe

9. die gerade Linie DA, so schneidet sie das verlangte Viereck ab.

III. Abschnitt.

Vom Verhältnisse des Inhaltes von einem Vielecke zu seinen Seiten und Winkeln.

§. 55.

Lehrsatz:

Im Vielecke ABCDEFA (Fig. 1) erhält man dessen Flächeninhalt, wenn man jedes Paar Seiten (eine z. B e ausgenommen) in den Sinus der zwischen ihnen liegenden Winkel multiplicirt, jene Producte, welche die Winkel Paarweise enthalten, negativ

tiv setzet, und am Ende alles durch 2 dividirt, das ist:

$$\text{Polyg. ABCDEF} = [\,fa\sin.A - fb\sin.(A+B) + fc\sin.(A+B+C) - fd\sin.(A+B+C+D) + ab\sin.B - ac\sin.(B+C) + ad\sin.(B+C+D) + bc\sin.C - bd\sin.(C+D) + cd\sin.D\,] : 2$$

Beweis:

1. Man nehme die Seite $AF = f$ zur Abscissenlinie, und A für den Anfangspunct derselben, und construire wie §. 5 für alle Ecke der Ordnung nach die entsprechenden Ordinaten und Abscissen, so ist aus Nr. 12 und 13 daselbst

2. $Bm = a\sin.A$
$Bn = -b\sin.(A+B)$
$Ct = a\sin.A - b\sin.(A+B)$
$Ds = a\sin.A - b\sin.(A+B) + c\sin.(A+B+C)$
$Dq = d\sin.(A+B+C+D)$
$Er = a\sin.A - b\sin.(A+B) + c\sin.(A+B+C) - d\sin.(A+B+C+D)$

3. Eben so aus §. 5. Nr. 14 und 15 ist
$Am = -a\cos.A$
$Cn = -b\cos.(A+B)$
$Cp = c\cos.(A+B+C)$
$qE = -d\cos.(A+B+C+D)$
$sF = AF - As = f - a\cos.A + b\cos.(A+B) - c\cos.(A+B+C)$

4. Nun iſt Trapez. $Ao = \frac{1}{2}(Bo + At)\ Bm$, oder

2 Trapez. $Ao = (Cn + Cn - Am)\ Bm$

$= (2\,Cn - Am)\ Bm$

$= -2\,b \cos.(A+B)\ a \sin. A$

$+ a \cos. A\ a \sin. A$

$= a^2 \sin. A \cos. A$

$- 2\,a\,b \sin. A \cos.(A+B)$

$= \frac{1}{2} a^2 \sin. 2A - 2ab \sin. A \cos.(A+B)$

(§. 306, I. Zuſ. Trigon.)

5. $2\,\triangle BCo = Cn \,.\, Bn = b^2 \sin.(A+B)\cos.(A+B)$

$= \frac{1}{2} b^2 \sin. 2\,(A+B)$

6. 2 Trap. $tD = (Ct + Ds)\ Cp$

$= (a \sin. A - b \sin.(A+B)$

$+ a \sin. A - b \sin.(A+B)$

$+ c \sin.(A+B+C))$

$\times c \cos.(A+B+C)$

$= 2\,a\,c \sin. A \cos.(A+B+C)$

$- 2bc \sin.(A+B)\cos.(A+B+C)$

$+ c^2 \sin.(A+B+C)\cos.(A+B+C)$

$= 2\,a\,c \sin. A \cos.(A+B+C)$

$- 2\,b\,c \sin.(A+B)$

$\cos.(A+B+C)$

$+ \frac{1}{2} c^2 \sin. 2\,(A+B+C)$

7. $2\,\triangle D\,qE = qE \,.\, Dq = -\frac{1}{2} d^2 \sin. 2(A+B+C+D)$

8. 2 Trap. $qF = (sF + qE)\ Er = [f - a \cos. A$

$+ b \cos.(A+B) - c \cos.(A+B+C)$

$- d \cos.(A+B+C+D)] \times [a \sin. A - b \sin.(A+B)$

$+ c \sin.(A+B+C) - d \sin.(A+B+C+D)]$

Die

Die fernere Entwickelung dieses Productes, und Fortsetzung des Beweises enthält die II. Tabelle.

Zusatz: Wenn in einer Figur alles, bis auf eine Seite und ihren beyden anliegenden Winkeln, gegeben ist, so läßt sich unmittelbar ihr Flächeninhalt angeben.

§. 56.

Beyspiel:

Im Siebenecke ABCDEFGA (Fig. 9) ist
$A = 113°23'$; $B = 84°44'$; $C = 270°31'$;
$D = 105°55'$; $E = 91°37'$; ferner die Seite $a = 361$,
$b = 383$, $c = 308$, $d = 400$, $e = 599$, $g = 531$
gegeben, man soll dessen Flächeninhalt suchen.

Auflösung:

$$\begin{aligned}\text{Polyg.} = [\ & g\,a\,\sin.A - g\,b\,\sin.(A+B)\\ & + g\,c\,\sin.(A+B+C) - g\,d\,\sin.(A+B+C+D)\\ & + g\,e\,\sin.(A+B+C+D+E)\\ & + a\,b\,\sin.B - a\,c\,\sin.(B+C) + a\,d\,\sin.(B+C+D)\\ & - a\,e\,\sin.(B+C+D+E)\\ & + b\,c\,\sin.C - b\,d\,\sin.(C+D) + b\,e\,\sin.(C+D+E)\\ & + c\,d\,\sin.D - c\,e\,\sin.(D+E) + d\,e\,\sin.E]\ :\ 2\end{aligned}$$

Nun

Nun ist aber g a sin. A = 175947,4 — . . . . .
— g b sin. (A+B) = 63239,4 — . . . . .
+ g c sin. (A+B+C) = 154975,2 — . . . . .
— g d sin. (A+B+C+D) = 120457,4 — . . . . .
+ ge sin. (A+B+C+D+E) = ... — 256778,3
+ a b sin. B = 137679,3 — . . . . .
— a c sin. (B+C) = 9207,3 — . . . . .
+ a d sin. (B+C+D) = 141666,2 — . . . . .
— a e sin. (B+C+D+E) = 47846,1 — . . . . .
+ b c sin. C = ... — 117959,2
— b d sin. (C+D) = ... — 43340,2
+ b e sin. (C+D+E) = 218126,6 — . . . . .
+ c d sin. D = 118476,7 — . . . . .
— c e sin. (D+E) = 55580,2 — . . . . .
+ d e sin. E = 239504,7 — . . . . .

2 Polyg. = 1482706,5 — 418077,7

folglich Pol. ABCDEFGA = 1064628,8 : 2
= 532314,40 □F.

Anmerkung: Man vergleiche die Auflösungen §. 35, 49 und 50 eben dieser Aufgabe.

§. 57.

Lehrsatz:

Im Vielecke ABCDEFA (Fig. 1) ist dessen Inhalt, oder Polyg. ABCDEFA

$$= \Big([a \sin. A - b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) - d \sin. (A+B+C+D)] :$$
$$[- \sin. (A+B+C+D+E)]$$
$$\times [d \sin. E - c \sin. (D+E) + b \sin. (C+D+E) - a \sin. (B+C+D+E)]$$
$$+ ab \sin. B - ac \sin. (B+C) + ad \sin. (B+C+D)$$
$$+ bc \sin. C - bd \sin. (C+D) + cd \sin. D \Big) : 2$$

Beweis:

1. Polyg. ABCDEFA $= [a b \sin. B - a c \sin. (B+C) + ad \sin. (B+C+D) - a e \sin. (B+C+D+E) + b c \sin. C - b d \sin. (C+D) + b e \sin. (C+D+E) + c d \sin. D - c e \sin. (D+E) + d e \sin. E] : 2$ (§. 55) oder
$= [e (d \sin. E - c \sin. (D+E) + b \sin. (C+D+E) - a \sin. (B+C+D+E)) + a b \sin. B - a c \sin. (B+C) + a d \sin. (B+C+D) + b c \sin. C - b d \sin. (C+D) + c d \sin. D] : 2$

2. Nun ist: $a \sin. A - b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) - d \sin. (A+B+C+D) + e \sin. (A+B+C+D+E) = 0$ (§. 5).

mithin

3. $e =$

$$[a \sin. A - b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C) - d \sin. (A+B+C+D)] : [- \sin. (A+B+C+D+E)].$$

4. Setzet man diesen Werth in letzter Gleichung statt e, so erhält man die aufgestellte Formel.

Zusatz: Wenn in einer Figur alles bis auf zwey Seiten und dem eingeschlossenen Winkel gegeben ist, so ist dadurch dessen Flächeninhalt gegeben, enthält die Figur eine ungerade Anzahl Seiten, so wird der Sinus im Nenner obiger Formel positiv, z. B.

Pent. ABCDEA

$$= \left(\frac{a \sin. A - b \sin. (A+B) + c \sin. (A+B+C)}{\sin. (A+B+C+D)} \right.$$

$$\times (c \sin. D - b \sin. (C+D) + a \sin. (B+C+D))$$

$$\left. + a b \sin. B - a c \sin. (B+C) + b c \sin. C \right) : 2$$

§. 58.

Beyspiel:

Im Siebenecke (Fig. 9) sind die Winkel $A = 113^\circ 23'$; $B = 84^\circ 44'$; $C = 270^\circ 31'$; $D = 105^\circ 55'$; $E = 91^\circ 37'$; $F = 114^\circ 22' 25''$; ferner die Seiten $a = 361$, $b = 383$, $c = 308$, $d = 400$, $e = 599$ gegeben, man suchet den Flächeninhalt.

Auf-

Auflösung:

1. Aus §. 57, Zus. wird

$$\text{Hept.} = \Big((a \sin.A - b \sin.(A+B) + c \sin.(A+B+C)$$
$$- d \sin.(A+B+C+D + e \sin.(A+B+C+D+E))$$
$$: \sin.(A+B+C+D+E+F)$$
$$\times (e \sin.F - d \sin.(F+E) + c \sin.(F+E+D)$$
$$- b \sin.(F+E+D+C)$$
$$+ a \sin.(F+E+D+C+B))$$
$$+ a b \sin.B - a c \sin.(B+C)$$
$$+ a d \sin.(B+C+D) - a e \sin.(B+C+D+E)$$
$$+ b c \sin.C - b d \sin.(C+D)$$
$$+ b e \sin.(C+D+E)$$
$$+ c d \sin.D - c e \sin.(D+E) + d e \sin.E \Big) : 2$$

2. Nun ist $a \sin.A = 331{,}351$
$- b \sin.(A+B) = 119{,}095$
$+ c \sin.(A+B+C) = 291{,}855$
$- d \sin.(A+B+C+D) = 226{,}850$
$+ e \sin.(A+B+C+D+E) = \ldots - 483{,}575$

Summa $= 969{,}151 - 483{,}575 = 485{,}576$

mithin

3. Der ganze Bruch $= \dfrac{485{,}576}{\sin. 60^\circ 31' 25''}$

log. 485,576 = 2,6862571

log. sin. 60°32'25" = 9,9398693 — 10, mithin

log. vom obigen Bruche = 2,7463878 = log. 557,68

4. Ferner ist e sin. F = 545,61

— d sin. (F+E) = 175,29

+ c sin. (F+E+D) = ... — 229,22

— b sin. (F+E+D+C) = 258,36

+ a sin. (F+E+D+C+B) = ... — 287,71

Summa = 979,26 — 516,93

= 462,33, folglich

5. beträgt das ganze erste Glied der Gleichung

557,68 X 462,33 = 257833,8

ferner a b sin. B = 137679,3

— a c sin. (B+C) = 9207,3

+ a d sin. (B+C+D) = 141666,2

— a e sin. (B+C+D+E) = 47846,1

+ b c sin. C = ... — 117959,2

— b d sin. (C+D) = ... — 43340,2

+ b e sin. (C+D+E) = 218126,6

+ c d sin. D = 118476,7

— c e sin. (D+E) = 55580,2

+ d e sin. E = 239504,7

2 Heptag. = 1225920,9 — 161299,4

mithin

6. Heptag. ABCDEFGA = 1064621,5 : 2

= 532310,7.

§. 59.

§. 59.

Aufgabe:

Eine Figur, von welcher alle Seiten und Winkel gegeben sind, in eine beliebige Anzahl gleicher, oder ungleicher nach einem gegebenen Verhältnisse bestimmter Theile P, p, π u. s. f. zu theilen.

Auflösung:

1. Man theile die Figur entweder in Dreyecke, wie §. 35, oder in Vierecke §. 48, und berechne den Flächeninhalt aller einzelnen Dreyecke oder Vierecke nach eben diesen §§.

2. Nun bestimme man die Größe der Theile P, p, π entweder durch Division, im Falle alle gleich groß seyn sollen, oder aus §. 215, Arithmetik, wenn sie ungleich nach einem gegebenen Verhältnisse bestimmt sind.

3. Jetzt vergleiche man den ersten Theil P mit dem ersten Drey = oder Vierecke, ist solcher ihrem Flächeninhalte gleich, so ist der erste Theil gefunden, wo nicht, so vergleiche man solchen

4. mit der Summe der beyden ersten Dreyecke oder Vierecke, und im Falle diese Summe kleiner als der Theil seyn sollte, mit der Summe der drey ersten Drey = oder Vierecke, und so fort, bis man

5. Auf eine Summe kömmt, die größer als der erste zu bestimmende Theil ist.

6. Nun nimmt man die nächst kleinere Summe S, zieht sie von P ab, das ist $P - S = D$, diesen Unterschied setzet man

7. Als den Flächeninhalt eines abzuschneidenden Drey = oder Viereckes, und bestimmt solches im ersten Falle aus §. 38, II. Zusatz, im zweyten aus §. 51 oder 53;

8. addirt man dieses zur obigen kleinern Summe, so ist der erste Theil gefunden.

9. Nun nimmt man die Summe der ersten beyden Theile, oder $P + p$, und verfährt wieder wie Nr. $3 - 8$, und so wiederholet man

10. Diese Verfahrungsart bey Bestimmung aller folgenden Theile.

§. 60.

1. Beyspiel:

Im Siebenecke ABCDEFGA (Fig. 18) sind alle Seiten und Winkel wie §. 35 gegeben, man soll es in drey Theile P, p, π so theilen, daß sie sich, wie die Zahlen 2, 3, 5, der Ordnung nach verhalten.

Auflösung:

1. Man theile nach §. 35 das Siebeneck in Dreyecke, und bestimme ihren Flächeninhalt, so wird

2. Hept. = 532326,50, mithin aus §. 215 Arithm.
10 : 532326,50 = 2 : P; mithin P = 106465,30
= 3 : p; mithin p = 159697,95
= 5 : π; mithin π = 266163,25

3. Vergleicht man nun den ersten Theil P mit dem ersten Dreyecke, und der Summe der beyden ersten (§. 35, Nr 24), so ist P größer als ersteres, und kleiner, als letztere, mithin

4. D = P — $\triangle$BAG = 106465,3 — 87973,7
= 18491,6

5. Man setze also $\triangle$BGM = D = 18491,6, so ist nebst diesem Inhalt noch die Seite BG = 751,29 und der Winkel GBM = GBC = 44°17′ aus §. 35, Nr. 4 und 7 bekannt, mithin

6. $BM = \frac{2 \triangle BGM}{BG \text{ sin. } GBM}$ (§. 38, II. Zusatz)
= 70,5 bestimmet.

7. Man nehme also aus B auf der Seite BC die Linie BM von gefundener Länge, ziehe die gerade GM, so ist das Viereck ABMGA der verlangte erste Theil P.

8. Nun nehme man die Summe der beyden ersten Theile, oder P + p = 266163,25 und vergleiche

sie

sie wieder mit obigen Dreyecken (§. 35, Nr. 24), so ist sie gröſser, als die Summe der beyden ersten, und kleiner als die Summe der drey ersten auf einander folgenden Dreyecke, man ziehe also wieder

9. die nächst kleinere Summe ab, das ist

$$D' = P + p - (\triangle BAG + \triangle CBG)$$
$$= 266163{,}25 - 188426{,}1 = 77737{,}15$$

10. Man setze nun $\triangle CGN = 77737{,}15$, so ist in diesem Dreyecke wieder nebst dem Inhalt aus §. 35, Nr. 10 u. 14 die Seite $CG = 546{,}93$ und der Winkel $CGN = CGF = 64°\,1'\,35''$ gegeben, mithin

11. $$GN = \frac{2\,\triangle CGN}{CG \sin. CGN} = 316{,}22.$$

12. Man schneide diese Linie ab, ziehe CN, so giebt das Viereck MCNGM den gesuchten zweyten Theil p, und

13. das überbleibende Fünfeck CDEFNC den dritten und letzten Theil π.

Zusatz: Sollten sich alle drey Theile vermöge der Aufgabe in einem gemeinschaftlichen Puncte z. B. C berühren, so müßte man von diesen aus an alle Ecke die Diagonalen ziehen, sonst wie in der vorhergehenden Auflösung verfahren, jedes kleine abzuschneidende Dreyeck aber allemal so bestimmen,

stimmen, daß solches in C seine Spitze, oder eine Ecke bekömmt.

§. 61.

II. Beyspiel:

Im Siebenecke ABCDEFGA (Fig. 15) sind alle Seiten und Winkel wie §. 49 gegeben, man soll solches in drey Theile theilen, die sich wie die Zahlen 2, 3, 5 verhalten, überdieß sollen die Grundlinien derselben zur gegebenen Linie VW, welche mit der Seite AG den Winkel GAW = 19°27′35″ einschließet, parallel seyn.

Auflösung:

1. Man ziehe durch alle Ecke der Figur zu VW die Parallelen GG, BB, u. s. f., so wird die Figur in Trapezen und Dreyecke zerleget, die man wie §. 50 berechnen kann.

2. Nun ist Hept. ABCDEFGA = 532309,68 (§. 50, Nr. 18), mithin:

10 : 532309,68 = 2 : P; also P = 106461,936
= 3 : p; . . p = 159692,904
= 5 : π; . . π = 266154,840

3. Wenn man den ersten Theil P mit dem Inhalte des ersten Dreyeckes GAG, und jenen der Summe vom ersten Dreyecke und Trapeze BG vergleichet, so ist letztere Summe größer als P, mithin
D = P — △GAG = 106461,936 — 58794,8
= 47667,136.

4. Man nehme also D für den Inhalt des abzuschneidenden Trapezes GN, so ist von solchem nebst dem Inhalte die Seite $GG = 664{,}725$, ferner die Winkel $G = 100°$, $G = 132°50'35''$, mithin auch ihre Nebenwinkel $M = 80°$, und $N = 47°9'25''$ bekannt (§. 50, Nr. 3 und 4).

5. Ferner ist nach §. 51, Zus.

$$GM = -\frac{GG \sin. G}{\sin. (M + N)} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \text{ Trapez. } GN \sin. G}{\sin. M \sin. (M + N)}\right) + \left(\frac{GG \sin. G}{\sin. (M + N)}\right)^2}$$

6. $\sin. G = \sin. N = \sin. 47°9'25''$;
$M + N = 127°9'25''$, also $\sin. (M + N) = \sin. 52°50'35''$; da also $M + N < 2R$, so muß man von der Wurzelgröße das Zeichen + nehmen (§. 51, Nr. 4).

7. Nun ist
$\log. GG = 2{,}8226420$
$\log. \sin. G = 9{,}8652337 - 10$
$\text{compl. dec. log. } \sin. (M+N) = 0{,}0985503$

$$\log. \frac{GG \sin. G}{\sin. (M+N)} = 2{,}7864260$$
$$= \log. 611{,}54, \text{ mithin}$$

8. $$\log. \left(\frac{GG \sin. G)}{\sin. (M + N)}\right)^2 = 5{,}5728520$$
$$= \log. 373983.$$

9. Ferner ist log. 2 = 0,3010300
log. Trap. GN = 4,6782187
log. sin. G = 9,8652337 — 10
compl. dec. log. sin. M = 0,0066485
c. dec. log sin. (M + N) = 0,0085503

$$\log. \frac{2 \text{ Trapez. GN sin. G}}{\text{sin. M sin. (M+N)}} = 4,9496812$$
$$= \log. 89059,7;$$

folglich

10. $GM = -611,54 + \sqrt{(89059,7 + 373983)}$
$= -611,54 + 680,47 = 68,93.$

11. Man trage also aus G auf der Seite GF die gefundene Linie GM auf, ziehe durch M zur gegegebenen Linie VW die Parallele MN, so giebt das Viereck AGMNA den gesuchten ersten Theil P.

12. Nun vergleiche man die Summe der beyden ersten Theile, oder $P + p = 266154,84$ mit der Summe des ersten Dreyeckes und Trapezes, und mit der Summe des Dreyeckes und der beyden ersten Trapeze (§. 50, Nr. 18), so ist P + p kleiner als letztere, und größer als erstere, mithin

13. $D' = P + p - (\triangle GAG + \text{Trapez. BG})$
$= 266154,84 - 121406,35$
$= 144748,49.$

14. Wenn man wieder D' als den Inhalt des abzuschneidenden Trapezes BO setzet, so sind davon nebst

diesem Inhalte aus §. 50, Nr. 6 u. 7, die Seite BB = 761,615, die Winkel B = 37°34′35″, B = 100°, mithin ihre Nebenwinkel R = 142°25′25″; O = 80° gegeben, mithin

$$15.\ BO = -\frac{BB \sin. B}{\sin. (O + R)} \pm \sqrt{\left(\frac{2 \text{ Trapez. } BO \sin. B}{\sin. O \sin. (O + R)} + \left(\frac{BB \sin. B}{\sin. (O + R)}\right)^2\right)}$$

16. Nun ist O + R = 222°25′25″, also sin. (O + R) = — sin. 42°25′25″; da nun ferner O + R > 2R, so muß man der Wurzelgröße das Zeichen — vorsetzen (§. 51, Nr. 4).

17. log. BB = 2,8817355
log. sin. B = 9,7852007 — 10
compl. dec. log. sin. (O+R) = 0,1709494

$$\log. \frac{BB \sin. B}{\sin. (O + R)} = 2,8378856;$$

= log. 688,47; folglich

$$18.\ \log. \left(\frac{BB \sin. B}{\sin. (O+R)}\right)^2 = 5,6757712$$

= log. 473992

19. log. 2 = 0,3010300
log. Trapez. BO = 5,1606141
log. sin. B = 9,7852007 — 10
compl. dec. log. sin. O = 0,0066485
c. dec. log. sin. (O+R) = 0,1709494

$$\log. \frac{2 \text{ Trap. BO sin. B}}{\text{sin. O sin. (O + R)}} = 5,4244427$$
$$= \log. 265731,3,$$

mithin

20. $BO = 688,47 - \sqrt{(-265731,3 + 473992)}$
$= 688,47 - 456,35 = 232,12.$

21. Man nehme also aus B auf der Seite BF die gefundene Linie BO, ziehe durch O zur Linie VW die Parallele OR, so ist MORNM der verlangte zweyte Theil p, so wie

22. der Ueberrest OFEDCRO den dritten Theil π giebt.

I. Anmerkung: Es leuchtet nun aus den angeführten Lehren der Polygonometrie für sich ein, wie nützlich ihre Kenntnisse dem praktischen Geometer bey Verfertigung der Grundrisse, bey Vermessung und Vertheilung der Grundstücke sind.

II. Anmerkung: Herr von Oppel gab im Jahre 1749 eine Anleitung zur Markscheidekunst, und 1752 einen Anhang zur selben heraus; im letztern stellet er §. 931 u. 932 die ersten Grund-

formeln

formeln der Polygonometrie, aber ohne Beweise, auf. Im Jahre 1800 erschienen: Dätzel's Anfangsgründe der Goniometrie, und im nemlichen Jahre: Neumann's Neue Beyträge zur practischen Geometrie; in beyden Schriften werden nicht nur die ersten Grundsätze vollkommen entwickelt, und bewiesen, sondern auch ihre Anwendung auf Vermessung und Vertheilung der Figuren auseinander gesetzet.

Mark-

Markscheidekunst.

I. Hauptstück.

Vom Gegenstande, und den nothwendigen Vorerkenntnissen der Markscheidekunst.

I. Abschnitt.

Erklärungen aus der Geognosie und dem Bergbau.

§. 62.

Erklärungen:

a) Allgemeine Lagerstätte der Fossilien sind jene Gegenden (Gebirge oder Ebenen), welche bauwürdige, oder zur bergmännischen Bearbeitung geeignete Fossilien enthalten, ohne daß es eben nothwendig ist, daß solche in bauwürdiger Menge vorkommen, ob man gleich darauf Rücksicht nimmt.

b) Be-

b) Besondere Lagerstätte der Fossilien heissen jene Theile oder Oerter der allgemeinen Lagerstätte, welche ein von der Hauptmasse der letztern mehr oder minder verschiedenes Mineral enthalten.

§. 63.

Erklärungen:

a) Bey besondern Lagerstätten unterscheiden sich gewöhnlich zwey schmale Streiffen, welche sie begränzen, und Saalbänder heissen.

b) Die Entfernung der Saalbänder bestimmt die Dicke, oder Mächtigkeit der zwischen ihnen liegenden Lagerstätte.

§. 64.

Erklärungen:

A. Die verschiedenen Bergarten liegen meist in parallelen Schichten über einander, werden aber manchmal durch Trennungen oder Risse (commissurae) in verschiedener Richtung durchschnitten, und voneinander getrennet: sind nun diese Spaltungen leer, oder mit keiner Masse in beträchtlicher Menge angefüllet, so nennt man sie schlechthin Klüfte, Flötzklüfte, Gebirgsspaltungen, Steinscheidungen u. s. w.

B. Sind aber diese Klüfte mit einer von der Gebirgsart verschiedenen Masse angefüllet, und enthalten

a) keine bauwürdigen Fossilien, so heissen sie entweder überhaupt taube Klüfte, oder insbesondere nach den darin enthaltenen Stoffen, Wasser-, Schmier-, Schmeer-Lettenklüfte u. s. w.

b) Zeigt hingegen die enthaltene Masse auf Bauwürdigkeit, und lauffen die Risse

α) mit den Gesteinschichten parallel, so heissen sie

a) Erzlager, wenn die Gesteinschichten des Gebirges unter sich nicht wesentlich unterschieden sind; im Gegentheile

b) Flötze, so wie

c) Flötze, die aus losen, späther aufgeschwämmten Schichten bestehen, insbesondere Seifenwerke genannt werden.

β) Durchschneiden aber die Risse die Erdschichten, so heissen sie Gänge (Venae).

Zusatz: Die Biegungen und Wendungen des Gebirges bestimmen jene der Erzlager und Flötze, hingegen

gegen auf die Richtung eines Ganges haben sie selten einen bemerkbaren Einfluß.

§. 65.

Erklärungen:

a) Bey Flötzen heißt die obere Gesteinschichte das **Dach** (Tectum), die untere die **Sohle** (Fundamentum).

b) Bey Gängen und Erzlagen, wenn man durch selbe söhlige Ebenen legt, so haben gegen solche die beyden Saalbänder auf der obern Seite sowohl als untern eine gewisse Neigung, nimmt man nun die obere Seite so einer söhligen Ebene, so heißt

α) jenes Saalband, dessen innere, oder dem Gange zugekehrte Seite mit der söhligen Ebene einen spitzigen Neigungswinkel hat, das **hangende Saalband**, oder auch das **Hangend** des Ganges (pars venae pendens).

β) Dessen innerer Neigungswinkel aber stumpf ist, das **liegende Saalband**, oder das **Liegend** des Ganges (pars venae jacens).

§. 66.

Erklärungen:

a) **Stockwerke** (venae cumulatae) heissen jene besondere Erzlagerstätte, deren Tieffe und Länge im Verhältnisse zu ihrer Mächtigkeit sehr gering ist.

b)

b) Nieren- und Butz-Werke nennet man die besondern Erzlagerstätte, wenn sie die Form einer Niere oder Butzens haben. Gewöhnlich hängen mehrere derselben durch sehr verengte Verbindungen zusammen, und selten trifft man dabey die sonst gewöhnlichen Saalbänder an.

Anmerkung: Mehrere Kenntnisse über die Beschaffenheit der verschiedenen Lagerstätte, und dabey vorkommenden Benennungen muß sich der practische Markscheider durch das Studium der Geognosie erwerben.

§. 67.

Erklärungen:

a) In des Bergmanns Sprache heißt jede nach der Richtung der Schwere (§. 177 — 179, Geometrie) gezogene gerade Linie, das ist, jede Verticallinie eine seigere Linie, so wie jede Verticalebene eine seigere Ebene

b) Eine Horitalebene heißt eine söhlige Ebene, und jede in dieser Ebene gezogene gerade Linie eine söhlige Linie.

c) Jede Linie und Ebene, welche nicht seiger, oder söhlig ist, heißt die Donlage, und ihr Neigungswinkel mit einer söhligen Ebene ihre Neigung.

I. Zusatz: Wenn durch eine seigere Linie eine Ebene gelegt wird, so ist sie ebenfalls seiger (§. 170, Geometrie.)

II. Zusatz: Die Durchschnittslinie zweyer seigern Ebenen ist seiger (§. 171, Geom.)

III. Zusatz: Die Durchschnittslinie einer jeden Ebene mit einer söhligen Ebene ist ebenfalls söhlig, denn sie liegt in letzterer Ebene.

IV. Zusatz: Wenn eine seigere Linie auf einer Ebene senkrecht steht, so ist letztere söhlig.

V. Zusatz: Zwey parallele donlägige Ebenen haben gleiche Neigungen (§. 175, Geom.)

VI. Zusatz: Eben so sind die Neigungen zweyer paralleler donlägiger Linien gleich (§. 169, I. Zusatz, Geometrie).

VII. Zusatz: Zwey söhlige Ebenen sind parallel (§. 179, II. Zus. Geometrie).

VIII. Zusatz: Zwey seigere Linien sind parallel (§. 179, b. Geom.)

§. 68.

Erklärungen:

Wenn man durch den einen Endespunct A (Fig. 19) der Donlage AB eine söhlige Ebene MN leget,

und

und auf sie aus dem andern Endspuncte B der Donlage einen Perpendikel BC fället, und endlich die gerade Linie AC zieht, so heißt

a) die seigere Linie BC die Seigerteufe, und

b) die söhlige Linie AC die Sohle der Donlage AB.

c) Nimmt man A für den Anfangspunct von AB, so sagt man, letztere Linie steige, so wie sie für den Anfangspunct B, oder nach der Richtung BA fällt.

I. Zusatz: Durch die Größe und Neigung der Donlage AB ist die Größe der Seigerteufe BC und Sohle AC bestimmt (§. 323, Trigon.)

II. Zusatz: Eben so ist umgekehrt durch die Seigerteufe und Sohle die Größe und Neigung der Donlage gegeben.

§. 69.

Erklärungen:

a) Unter Grube versteht man oft jede practisch-bergmännische Unternehmung auf Erze;

b) gewöhnlich aber versteht man unter dem Namen Grube den Inbegriff oder Zusammenhang mehrerer bergmännischer Gebäude auf Erze, über oder unter der Erde.

§. 70.

Erklärungen:

a) Eine Oeffnung, welche beynahe seiger in den Berg getrieben (abgeteufet) wird, heißt

α) ein Schacht, wenn sein Anfang (Mündung) auf der Oberfläche der Erde (am Tage) ist; im Gegentheile

β) ein Gesenk.

b) Wird aber die Oeffnung in das Gebirg beynahe söhlig getrieben, und hat sie

α) ihren Anfang, oder Mündung am Tage, so heißt sie ein Stolle oder Stolln; im Gegentheile

β) eine Strecke.

c) Bey einem Stolln und Strecke heißt

α) die untere Fläche, in wie ferne sie beynahe söhlig, die Sohle und

β) die obere Fläche der First des Stolln oder Strecke.

§. 71.

Erklärungen:

a) Der Endespunct eines söhligen Baues, das ist, eines jeden Stollens oder Strecke heißt das Ort, und

b)

b) wenn dieses Ort der Endespunct des ganzen Baues ist, das Feldort oder ganzes Ort.

c) Den Bau von einem Orte fortsetzen, heißt ein Ort treiben.

§. 72.

Erklärungen:

Schächte sowohl als Gesenke heißen

a) Seiger = oder Richtschächte und Gesenke, wenn sie genau seiger stehen,

b) flache, donlägige Schächte und Gesenke, wenn sie eine Neigung haben.

Anmerkung: Es läßt zuweilen schwer, einen flachen Schacht von einem Stolln, so wie ein flaches Gesenk von einer Strecke zu unterscheiden; wird der Bau nach der Donlage eines Ganges getrieben, so heißt solcher allemal ein Schacht oder Gesenk, so wie man den Bau nach den Streichen oder Länge des Ganges getrieben, allemal einen Stolln oder Strecke nennet.

§. 73.

Erklärungen:

In Rücksicht seiner Bestimmung heißt ein Schacht

a) ein Such- oder Schurfschacht, wenn er zur Untersuchung des Gebirges dienet;

b) Licht- oder Wetterschacht, wenn er Luftzug bewirket;

c) Kunstschacht, wenn durch ihn vermittels Maschinen (Kunst-Gezeuge) Wässer ausgebracht werden;

d) Fahrschacht, durch welchen man in das Gebirg hinnein oder herauskömmt (ein- oder ausfährt);

e) Förderschacht, wenn man durch selben das gewonnene Erz, oder andere Mineralien herausbringet.

Zusatz: Alle diese eben angeführte Benennungen kommen auch bey ähnlichen Bestimmungen den Gesenken, Stollen und Strecken zu.

§. 74.

Erklärung:

Erbstolln heißt jener Stolln, der ein oder mehrere Grubengebäude in einer bestimmten Teufe unterteufet, das Maaß seiner Teufe und seiner Privilegien sind in verschiedenen Ländern verschieden.

§. 75.

Erklärungen:

a) Einen Gang anfahren, erschrotten oder treffen, heißt durch den Bau den Gang entblößen.

b) Den Gang auffahren, heißt im Hangend, oder Liegend, oder wie immer auf solchen fortbauen.

c) Den Gang durchfahren, heißt den Bau vom Hangend bis in's Liegend, oder umgekehrt, verfolgen.

d) Den Gang überfahren, heißt solchen mit dem Bau durchschneiden.

e) Den Gang abbauen, heißt die getroffenen Erze aus solchen wegnehmen, und wenn man sie alle wegnimmt, so heißt dieses den Gang preßhauen.

§. 76.

Erklärung:

Die Wissenschaft, die zum Behufe des Bergbaues nothwendigen Vermessungen auf die leichteste und sicherste Art zu verrichten, heißt Markscheidekunst (Geometria subterranea) (§. 6, Arithm.)

I. **Zusatz:** Sie hat ihren Namen vermuthlich von dem Namen Mark oder Gränze, weil man anfäng-

anfänglich nur dadurch finden wollte, wie weit einer befugt sey, seinen Bau unter der Erde fortzusetzen, dem sein Antheil auf der Oberfläche derselben (zu Tage) angewiesen ist.

II. Zusatz: Da ohne Markscheidekunst kein zweckmäßiger Bergbau möglich ist, so ist ihr Nutzen so unverkennbar, als jener des Bergbaues selbst.

Anmerkung:

Klassische Werke über die Markscheidekunst sind:

Georgii Agricolae de Re Metallica libri XII. Basileae ap. Froben. et Episcopium 1556. Fol.

Anleitung zur Markscheidekunst, nach ihren Anfangsgründen und Ausübungen kürzlich entworfen. Dresden bey Walther 1749, gr. 4.

Anhang der Anleitung zur Markscheidekunst. Dresden 1752, gr. 4. — gehört zum vorhergehenden; von beyden ist der Verfasser von Oppel.

Gründlicher Unterricht vom Bergbau, nach Anleitung der Markscheidekunst, von Aug. Beyern. Schneeberg bey Fulden 1749. Fol.

Kästners Anmerkungen über die Markscheidekunst, nebst einer Abhandlung von Höhenmessungen durch das Barometer. Göttingen bey der Wittwe Vandenhök 1775. 8.

Lempe's gründliche Anleitung zur Markscheidekunst. Leipzig bey Crusius 1782. 8.

Beyerns Unterricht vom Bergbau, nach Anleitung der Markscheidekunst, vermehrt und verbessert (vom Lempe). Altenburg in der Richterischen Buchhandlung 1785. 4.

II. Abschnitt.

Von den beym Bergbau und in der Markscheidekunst üblichen Maaßen.

§. 77.

Erklärungen:

a) Das Längenmaaß in der Markscheidekunst heißt Klafter oder Lachter, welches

b) in 10 gleiche Theile getheilt wird, die man Zehntl nennet,

c) Ein Zehntl besteht aus 10 Zollen, und

d) ein Zoll aus 10 Linien oder Primen.

I. Zusatz: Nach der angeführten Eintheilung, welche in den östreichischen und bairischen Staaten gewöhnlich ist, wird 1 Lachter = 10 Zehntl = 100 Zoll = 1000 Prim.

II. Zusatz: In andern Ländern, z. B. Sachsen, Braunschweig wird das Lachter in 8 gleiche Theile oder Achtl getheilt, so daß 1 Lachter = 8 Achtl = 80 Zoll = 800 Prim.

III. Zusatz: Die Länge des bairischen Lachters hält nach dem 18ten Artikel der bairischen Bergordnung von 1784 genau $6\frac{3}{4}$ = 6,75 bairische Fuß, oder im bürgerlichen Duodecimalmaaße 6 bairische Fuß, 9 Zoll.

Anmerkung: Da ich zunächst für mein Vaterland schreibe, so werde ich immer die in Baiern übliche Decimaleintheilung des Lachters beybehalten, ihre Reduction auf die sächsische Eintheilung, wenn man deren benöthiget ist, hat ohnehin nicht die mindeste Beschwerniß.

§. 78.

Tabelle

zur Vergleichung verschiedener Lachter.

Lachter verschiedener Oerter.	1 Lachter hält im Orts Maaß.	1 Lacht. in rheinländ. Fußen.	1 Lacht. an Paris. Duodecimal-Linien.	Logarithmus der letztern Zahlen.	
Bairisches u. Oberpfälzisch. Lacht.	6,75 Bairische Fuß.	6,277	873,315	2,9411709	a
Dänisches Lr.	— — —	6,409	891,684	2,9502111	b
Eislebisch. Lr.	3 1/2 Eislebische Ellen	6,285	874,332	2,9417261	b
Englisches Lr. (Fathom).	6 Englische F.	5,8286 5,8287	810,933 810,948	2,9089851 2,9089930	b c
alt Freybergisches Lr.	3 1/2 alt Freyberg. Ellen.	6,280	873,737	2,9413804	b
Idryan. Lr.	6 Idryan. Fuß.	6,239	868,032	2,9385358	b
Joachimthal. nach Voigtl.	— — —	6,113	850,502	2,9296752	b
nach andern	3 1/2 Freyb. E.	6,280	873,737	2,9413804	b
Magdeb. Lr.	7 Magdeburg. Werksch.				
Oberharzisches oder Klausthal. Lr	6 2/3 Braunschweig. Ell.	6,135	853,563	2,9312354	b
Russisches Lr.	7. Londner F.	6,798 6,800	945,806 946,106	2,9758020 2,9759398	b c
Churſächs. Lr.	7 Leipz. Bau F.	6,300 6,304	876,519 877,1	2,9427613 2,9430491	b d
Herzogl. sächsisches Lr.	3 1/2 Freyberger Ellen.	6,280	873,737	2,9413804	b
Schennitz. Lr.	3 Schemnitzer Stadt = Ell.	6,451	897,528	2,9530478	b
Schwed. Lr.	6 Schwed. F.	5,675 5,6752	789,563 789,6	2,8973867 2,7984071	b c
Tyrolisch. Lr.	5 Tyrol. Werk-Schuh und 4 Zoll = 64 Z.				b

Anmer

Anmerkung: Bey Berechnung dieser Tabelle ist das Verhältniß des rheinländischen Fußes : Pariser F. = 139,13 : 144 angenommen werden (Arithm. Anhang, Seite 451), ferner beziehen sich die in der letzten Spalte angezeigten Buchstaben auf die Quellen der Angaben, nemlich:

a) Man sehe den 18ten Artikel der bairischen Bergordnung vom Jahre 1784.

b) Lempe's Fortsetzung der gründlichen Anleitung zur Markscheidekunst. Leipzig bey Crusius 1792.

c) Die angeführte Größe des englischen und russischen Lachters in rheinländischen Fußen, und Pariser Duodecimallinien folgt aus dem Verhältnisse des englischen, rheinländischen und Pariser Fußes Arithm. Anhang, Seite 451.

d) Aus dem nemlichen Anhange der Arithmetik entspringt die Größe des churfächsischen, und

e) schwedischen Lachters.

§. 79.

Aufgabe:

Verschiedene Lachter aufeinander zu reduciren, z. B. 36 Lachter 5 Achtl 7 Zolle Oberharzischen Bergmaaßes in bairische zu verwandeln.

Auflösung:

1. Man bringe die gegebenen Lachter, Achtl, und Zolle auf die Benennung von Lachtern, es ist nemlich

2. 36 Lr. 5 Achtl. 7 Zoll $= 36 + \frac{57}{80}$ Lr.

$= \frac{2937}{80}$ Lachter.

3. Vermöge der Tabelle ist aber Oberharz. Lachter: bairische Lachter $= 853{,}563 : 873{,}315$, mithin 1 Oberharz. Lr. $= \frac{853{,}563}{873{,}315}$ bair. Lr., folglich

4. $\frac{2937}{80}$ Oberrs. Lr. $= \frac{2937 \times 853{,}563}{80 \times 873{,}315}$ bair. Lr.

5. Nun ist log. 2937 $=$ 3,4679039
log. 853,563 $=$ 2,9312354 (Tabelle)
c. dec. log. 80 $=$ 8,0969100 — 10
c. dec. log. 873,315 $=$ 7,0588291 — 10

1,5548784 $=$ log. 35,882.

6. Folglich betragen 36 Lachter 5 Achtl 7 Zoll Oberharzischen Bergmaaßes im bairischen 35 Lachtr, 8 Zehntl, 8 Zoll, 2 Prim.

§. 80.

Erklärungen:

a) Um die Neigung einer Donlage (§. 67. c) zu messen, wird der Kreis, so wie in der Geometrie, in Grade, Minuten und Secunden getheilet.

b)

b) Zur Bestimmung aber des Winkels zweyer solhligen Linien wird der ganze Kreis in 24 gleiche Theile, die Stunden heissen, jede Stunde wieder in 15 gleiche Theile getheilet.

I. Zusatz: Da der 15te Theil einer Stunde

$$= \frac{1}{15} \times \frac{\text{per.}}{24} = \frac{1}{360} \text{ periph.} = 1^\circ$$

ist, so könnte man solchen füglich einen Grad heissen.

II. Zusatz: Die Eintheilung des Kreises in 24 St., und letztere in 15 gleiche Theile ist in Ungarn und Baiern gewöhnlich; in andern Ländern z. B. Sachsen, Braunschweig wird der Kreis in zweymal 12 Stunden, und jede Stunde in 8 Theile oder Achtl getheilet.

§. 81.

Reductionstabelle der sächsischen Stunden auf Grade.

Achtlst.	Halten			Stund.	°
	°	′	″		
1/4	0	28	7,5	1	15
1/2	0	56	15	2	30
3/4	1	24	22,5	3	45
1	1	52	30	4	60
2	3	45	—	5	75
3	5	37	30	6	90
4	7	30	—	7	105
5	9	22	30	8	120
6	11	15	—	9	135
7	13	7	30	10	150
8	15	—	—	11	165
				12	180

Zusatz: Will man also einen gegebenen Winkel z. B. von 3 St. 7¾ Achtl in gewöhnlichen Graden, Minuten u. s. f. angeben: so ist nach der Tabelle:

3 St.	= 45°	0′	0″
7 Achtl	= 13	7	30
¾ Achtl	= 1	24	22,5
also 3 St. 7¾ Achtl	= 59°	31′	52,5″.

Anmerkung: Im gegenwärtigen Lehrbuche wird immer nur die in Baiern übliche Kreiseintheilung in 24 St. und letzterer in 15 gleiche Theile zum Grunde gelegt.

III. Abschnitt.

Von der Mittags- und der Magnet-Linie.

§. 82.

Erklärungen:

a) Für einen gegebenen Ort oder Punct L der Erde heißt ein größter Weltkreis, welcher durch die Weltpole und das Zenit von L geht, der Meridian oder Mittagskreis des Ortes L, so wie seine Ebene die Mittagsebene von L.

b) Leget man ferner durch L eine söhlige Ebene, so heißt die söhlige Durchschnittslinie dieser Ebene mit dem Meridian die Meridian- oder Mittagslinie des Ortes L.

I. Zusatz: Die Mittagsebene ist seiger, denn sie geht durch den Mittelpunct C der Erde, und durch das Zenit von L, nun ist CL seiger, folglich auch die Mittagsebene.

II. Zusatz: Die Mittagslinien zweyer, oder mehrerer nicht weit von einander entlegenen Oerter, da sie sich erst im Mittelpuncte der Erde durchschneiden, können als Parallellinien angenommen werden.

III. Zusatz: Die Mittagslinie sowohl als Mittagsebene läßt sich in den nördlichen und südlichen Theil theilen.

§. 83.

Erklärungen:

a) Eine Ebene, welche in der Richtung der Magnet-Nadel eines Ortes L auf dem Horizont senkrecht steht, das ist, eine seigere Ebene in der Richtung der Magnetnadel heißt die Magnetebene des Ortes L, und

b) ihre söhlige Durchschnittslinie mit der söhligen Ebene die Mittagslinie dieses Ortes, und zwar

α) der Theil von der Spitze an, um welche sich die Nadel drehet, gegen Norden zu, die nördliche, so wie

β) der andere Theil gegen Süden zu, die südliche Seite der Magnetlinie und Magnetebene.

c) Der Neigungswinkel, welchen die nördlichen Seiten der Magnet- und Mittags-Ebene einschliessen, heißt die **Abweichung des Magnetes** (Declinatio) für den Ort L; diese Abweichung heißt

α) östlich, wenn die nördliche Seite der Magnetebene auf die östliche Seite der Mittagsebene zu liegen kömmt, so wie sie

β) **westlich** heißt, wenn die Magnetebene auf die westliche Seite der Mittagsebene fällt.

I. Zusatz: Wenn (Fig. 20) MN eine söhlige Ebene, ACBD der nördliche Theil der Magnetebene, und AFED der nördliche Theil der Mittagsebene, mithin AC, AF die nördlichen Theile der Magnet- und Mittagslinien sind, so ist der söhlige Winkel CAF die Abweichung der Magnetlinie (§. 171, II. Zus. Geometrie).

II. Zusatz: Stellet hingegen ACBD überhaupt eine seigere Ebene, und AFED den nördlichen Theil der Magnet- oder Mittagsebene vor, so ist ebenfalls der söhlige Winkel CAF der Neigungswinkel beyder Ebenen.

III. Zusatz: Leget man durch den Anfangspunct A der Donlage AB eine söhlige Ebene MN, und durch AB die seigere Ebene ACBD, und stellet wieder AFED den nördlichen Theil der Magnet- oder Meridian-Ebene vor, so ist der Neigungs-Winkel der seigern Ebene mit der Mittags- oder Magnet-Ebene so groß, als der söhlige Winkel CAF, welchen die Sohle AC der Donlage AB mit dem nördlichen Theile AF der Mittags- oder Magnet-Linie einschließt.

§. 84.

Erfahrungssätze:

a) Die Magnetnadel behält während eines kurzen Zeitraumes gewöhnlich die nemliche Richtung.

b) Die Richtungen der Magnetnadel zu einerley Zeit an verschiedenen Orten, die nicht weit von einander entfernt sind, können als Parallel angesehen werden.

Zusatz: Auf diese Voraussetzungen stützet sich die Anwendung der Maguetnadel auf die Vermessung söhliger Winkel.

§. 85.

Erklärungen:

a) Für die Donlage AB (Fig. 19) heißt der söhlige Winkel CAF, welchen die Sohle AC mit dem nördlichen Theile AF der Magnetlinie einschließt, das Streichen der Donlage AB, so wie ihrer Sohle AC.

b) Für eine seigere oder auch donlägige Ebene ACBD (Fig. 20), welche die söhlige Ebene MN in AC schneidet, heißt ebenfalls der söhlige Winkel CAF, welchen die Durchschnittslinie AC mit dem nördlichen Theile AF der Magnetlinie einschließt, das Streichen der seigern oder donlägigen Ebene ACBD.

Zusatz: Man bestimmet die Größe des Winkels CAF, oder das Streichen, immer von Nord gegen Ost zu, so daß also Linien oder Ebenen, deren Sohle oder Durchschnittslinie AC auf die östliche Seite von AF fällt einen hohlen, welche aber

ihre Sohle oder Durchschnittslinie AC auf der westlichen Seite von AF haben, einen erhabenen Winkel bilden.

§. 86.

Lehrsatz:

Zwey söhlige Parallellinien haben gleiches Streichen.

Beweis:

1. Die beyden söhligen Parallelen liegen entweder in der nemlichen, oder in verschiedenen söhligen Ebenen.

2. Im ersten Falle, wo nemlich die beyden Parallelen AC, ac (Fig. 19) in der söhligen Ebene MN liegen, und AF, af die nördlichen Theile der Magnetlinie für beyde Stellen A und a anzeigen, ist

3. AF ♯ af (§. 84. b), mithin schneidet ca verlängert die Magnetlinie FA in $\propto$ (§. 45, II. Zusatz, Geometrie) und

4. caf $=$ c$\propto$F $=$ CAF (§. 45, Nr. II. Geometrie), das ist, die beyden Parallelen AC, ac haben gleiches Streichen.

5. Im zweyten Falle, wenn nemlich die söhligen Parallelen AC, DB (Fig. 20) in verschiedenen söhligen Ebenen liegen, und AF, DE die nörd-

lichen

lichen Theile der Magnetlinie an diesen Stellen bezeichnen, so ist

6. AC # DB (per hyp.), AF # DE (§. 84. b), also CAF = BDE (§. 169, Geometrie), das ist, die beyden söhligen Parallelen AC, DB haben wieder gleiches Streichen.

Zusatz: Zwey Parallelebenen haben gleiches Streichen; denn ihre Durchschnittslinien mit einer söhligen Ebene sind parallel (§. 172, II. Zusatz, Geometrie).

§. 87.

Lehrsatz:

Wenn zwey söhlige Linien gleiches Streichen haben, so sind sie parallel.

Beweis:

1. Wenn die beyden söhligen Linien AC, ac (Fig. 19) in der nemlichen söhligen Ebene MN liegen, und AF, af die nördlichen Theile der Magnetlinie vorstellen, so ist

2. CAF = caf (per hyp.) und AF # af (§. 84 b) mithin schneidet ea verlängert die Linie FA in ∝, und caf = c∝F = CAF, folglich

3. AC # ∝c.

4. Liegen aber die beyden söhligen Linien AC, DB (Fig. 20) in verschiedenen söhligen Ebenen, und bezeichnen AF, DE die nördlichen Theile der Magnetlinie, so ist

5. CAF = BDE (per hyp.) und die Ebenen CAF und BDE sind parallel (§. 67, VII. Zus.)

6. Nun lege man durch C, A, D eine Ebene, welche die Ebene BDE in Dβ schneide, so ist

7. Dβ ♯ AC (§. 172, II. Zus. Geometr.), ferner AF ♯ DE (§. 84. b), mithin

8. CAF = βDE = BDE (Nr. 5), folglich fällt Bβ mit DB zusammen, und DB ♯ AC (Nr. 7).

Zusatz: Wenn zwey Ebenen nach einer Seite zu gleiche Neigungen, und überdieß gleiches Streichen haben, so sind sie parallel (§. 176. Geom.)

§. 88.

Lehrsatz:

Zwey parallele Donlagen AB, ab (Fig. 21) haben gleiches Streichen.

Beweis:

1. AP sey der nördliche Theil der Magnetlinie bey, so schneidet sie verlängert die andere Parallele in a.

2. Durch die söhlige Linie Aa lege man die söhlige Ebene MN, und nehme AB = ab,

3. Aus B, b fälle man die Lothe BC, bc auf MN, und ziehe die Sohlen AC, ac, so ist BC ∥ bc (§. 165, Nr. I. Geometrie) mithin

4. der Winkel ABC = abc (§. 169, Geom.); ACB = acb = 90°, also △ABC ≡ △abc (§. 47, II. Zus. Geom.), und also

5. AC = ac; BC = bc.

6. Nun ziehe man noch die geraden Linien Bb, Cc, so ist

7. Aa ∥ Bb ∥ Cc (§. 51, VII. Zusatz), folglich

8. AC ∥ ac, also PAC = Pac, das ist, die beyden parallelen Donlagen AB, ab haben gleiches Streichen.

§. 89.

Erklärungen:

a) Wenn mehrere auf einander folgende Donlagen in der nemlichen seigern Ebene liegen, oder wenn eine Fläche aus mehrern auf einander folgenden donlägigen Ebenen besteht, so heißt die Neigung einer geraden Linie, oder einer Ebene, welche von der Lage der ganzen gebrochenen Linie oder Ebene

am wenigsten abweichet, die mittlere oder Haupt-Neigung der gebrochenen Linie, oder Ebene.

b) Bilden die Sohlen mehrerer aufeinander folgender Donlagen, oder die söhligen Durchschnittslinien mehrerer Ebenen eine gebrochene Linie, so heißt das Streichen einer Linie, welche von der gebrochenen Linie am wenigsten abweicht, das Hauptstreichen dieser Donlagen, oder gebrochenen Ebene.

I. Zusatz: Um die mittlere Neigung, oder das Hauptstreichen einer gebrochenen Linie oder Ebene zu bestimmen, kömmt es

a) auf die Neigung oder Streichen, und

b) auf die Länge der einzelnen Linien und Ebenen an.

II. Zusatz: Wenn a, b die Längen, und α, β die Neigungen oder das Streichen der einzelnen Linien oder Ebenen ausdrücken, ferner $a = nb$, so ist die Hauptneigung oder das Hauptstreichen

$$\varphi = \frac{n\alpha + \beta}{n + 1}.$$

III.

III. Zusatz: Wenn daher $a = 3b$; $\alpha = 50°$; $\beta = 52°$, so ist $\varphi = \frac{3 \times 50° + 52}{3 + 1}$

$= \frac{202°}{4} = 50°30'$.

IV. Zusatz: Wenn hingegen a, b, c die Längen, α, β, γ die Neigungen bezeichnen, und

$a = mc$; $b = nc$, so ist $\varphi = \frac{m\alpha + n\beta + \gamma}{m + n + 1}$.

I. Anmerkung: Um das Hauptstreichen zu finden, kann man die gebrochene Linie in Grundriß legen, dann eine gerade Linie ziehen, welche dem Augenmaaße nach von der Richtung der gebrochenen am wenigsten abweicht, und dann das Streichen dieser Linie durch den Compaß suchen.

II. Anmerkung: Herr Lempe giebt in seiner gründlichen Anleitung zur Markscheidekunst ein anderes Verfahren an, welches aber auf Statischen Grundsätzen beruhet.

§. 90.

Aufgabe:

An einem gegebenen Orte die Meridian-Linie zu ziehen.

I. Auflösung: (Fig. 22.)

1. Man beschreibe auf einer genau söhlig gestellten Ebene MN einen Kreis,

2. Im Mittelpuncte C errichte man einen senkrechten Stift CD.

3. Nun beobachte man Vormittag genau den Punct A, wo der Schatten der Spitze D auf den gezogenen Kreis trifft,

4. Nachmittag bemerke man wieder den Punct B, wo der Schatten von D in die Peripherie eben dieses Kreises fällt.

5. Ziehet man die Sehne AB, und halbiret sie durch den Perpendikel EF, so ist letzterer die verlangte Meridianlinie.

II. Auflösung: (Fig. 23.)

6. Man befestige ein Blättchen P, wodurch ein kleines Loch D vermittels einer Nadel geschlagen ist, an ein Fußgestell PR, welches

7. auf eine Ebene MN gesetzet wird.

8. Nun bringe man diese Ebene MN an einer Stelle, wo sie Vor- und Nachmittag von der Sonne beschienen werden kann, in eine söhlige Lage.

9. Beschreibe aus dem Puncte C, welcher in der Ebene MN genau unter dem Loche D liegt, und vermittels eines Senkels DC bestimmet wird, mehrere concentrische Kreise.

10. Bemerke auf jeden von diesen den hellen Lichtpunct A, a Vormittags, und Nachmittags b, B, wo nemlich der Lichtstrahl durch D auf die Ebene MN trifft.

11. Ziehe die geraden Linien AB, ab, errichte in ihrer Mitte den Perpendikel EF, so ist solcher die verlangte Mittagslinie.

Beweis für beyde Auflösungen:

12. Beyde Auflösungen stützen sich auf nachfolgenden Lehrsatz der Astronomie:

Die Sonne steht bey gleicher Höhe (mithin wenn im Isten Falle der Schatten der Spitze, im IIten der lichte Punct auf einerley Kreislinie fällt) gleichweit vom Mittagskreise ab, halbirt man also die Sehne durch die gerade Linie CE vom Mittelpuncte C, so geht die Mittagsebene durch E, ferner durch die Scheitellinie DC, also durch C, mithin ist die söhlige Linie CE, oder ihre Verlängerung EF die Durchschnittslinie des Meridians und Horizonts, folglich die gesuchte Mittagslinie (§. 82).

Anmerkung: Da der astronomische Lehrsatz nur zur Zeit der Sonnenwende richtig ist, so ist es räthlich, die Mittagslinie in den Tagen um den 22sten Juni zu ziehen.

III. Auflösung:

13. In der Mitte eines gegen Nord liegenden Fensters hänge man ein Loth auf,

14. befestige an einem hölzernen Bret MN einen Arm ABD, mit einem Senkel DC.

15. Wenn nun der Polarstern unter oder über dem Pole in der nördlichen Mittagsebene steht (culminirt), so schiebe man dieses Bret mit seinem Senkel, in einiger Entfernung hinter dem am Fenster befindlichen Lothe, so lange hin und her, bis

16. beyde Fäden den Polarstern bedecken.

17. Eine söhlige Linie in der Richtung, in welcher beyde Fäden hintereinander liegen, gezogen, ist die verlangte Mittagslinie.

Beweis:

18. Beyde Fäden befinden sich in einer Verticalebene (§. 179, I. Zusatz, Geometrie), welche durch den Nordpol (Nr. 15), den Mittelpunct der Erde (§. 178, Geometrie), mithin durch die Weltaxe, oder beyde Pole, und durch den Scheitel geht, folglich in der Mittagsebene, mithin ist die in dieser Ebene gezogene söhlige Linie die Durchschnittslinie der Mittagsebene mit einer söhligen, folglich die Mittagslinie (§. 82).

Anmerkung: Letztere Auflösung ist zuverlässiger, als die beyden vorigen, und setzet nur Kennt-

niß des Polarsterns und seiner Culminations-zeit voraus.

§. 91.

Culminationszeit des Polarsterns für Berlin.

Monath.	Tag.	Zeit der Culmination.	Monath.	Tag.	Zeit der Culmination.
Januar.	1	5 U. 57 M. Ab.	Julius.	10	5 U. 29 M Mor
	11	5 14		20	4 49 gens.
	21	4 31		30	4 10
	31	3 50			
Februar.	10	3 10	Augustus.	9	3 31
	20	2 31		19	2 53
				29	2 16
Martius.	2	1 53	Septembr.	8	1 40
	12	1 16		18	1 5
	22	0 40		28	0 29
Aprilis.	1	0 3	Octobr.	8	11 49 Abends
	11	11 27 Morg.		18	11 12
	21	10 50		28	10 34
Majus.	1	10 12	Novemb.	7	9 55
	11	9 34		17	9 14
	21	8 55		27	8 32
	31	8 15			
Junius.	10	7 34	Decembr.	7	7 49
	20	6 52		17	7 5
	30	6 10		27	6 20

I. Zusatz: Diese Tabelle giebt von zehen zu zehen Tagen die Zeit an, wenn der Polarstern zu Berlin über dem Pole ist, nach 11 Stunden 58 Minuten culminiret solcher auf der untern Seite.

II. Zusatz: Die Culminationszeit der dazwischen liegenden Tage läßt sich leicht durch die Regeldetri finden, z. B. für den 15ten Jan.

Da diese Zeit am 11ten Jan. 5 Uhr 14 Min. und den 21sten Jan. aber 4 U. 31 Minuten, also in 10 Tagen um 43′ vorrücket, oder früher eintritt, so ist:

10 T.: 5 T. = 43′: x′; also x = 21,5 Min.

man darf also nur solche entweder der letztern addiren, oder von der erstern subtrahiren, so erhält man die gesuchte Zeit, es ist nemlich für den

15. Jan. Diese Zeit = 4 U. 31′ + 21,5′
= 5 U. 14′ — 21,5′
= 4 U. 52,5′.

III. Zusatz: Da endlich die angeführte Tabelle für den Berliner Meridian berechnet ist, so muß man aus astronomischen Tabellen oder einer guten Landcharte die geographische Länge für einen bestimmten Ort wissen, und daraus die Tabelle berichtigen, man muß nemlich für jede Minute, um welche dieser Ort mehr westlich liegt als Berlin, 4 Zeitminuten von der Culminationszeit in der Tabelle abziehen, oder im Falle solcher mehr östlich liegt, addiren.

II. Hauptstück.

Von den Markscheide-Instrumenten.

I. Abschnitt.

Vom Lachterstabe, der Lachterschnur, und Lachterkette.

§. 92.

Beschreibungen:

a) Lachterstab heißt ein aus wohl ausgetrocknetem Holze verfertigter Stab, auf welchem genau die Länge eines Lachters nebst dessen Abtheilungen in Zehentl, Zolle und Primen verzeichnet ist; auf ähnliche Art sind die halben Lachterstäbe, das ist, Stäbe von der Länge eines halben Lachters beschaffen.

b) Eine hänfene oder seidene Schnur, an welcher durch Merkmale die einzelnen Lachterlängen angezeigt sind, heißt eine Lachterschnur.

c)

c) Die Lachterkette endlich hält gewöhnlich 6 Lachter in der Länge, und besteht aus dünnem Messingdrathe, von welchem ein Glied 5 Zoll faßt, und wo die Länge der einzelnen Lachter durch Merkmaale angezeiget ist.

I. Zusatz: Der Lachterstab wird gewöhnlich, um seine Beschädigung zu verhüten, an seinen beyden Enden mit einer messernen Kappe versehen. Vermittels eines guten Stangen = und Handzirkels läßt sich seine Abtheilung in Zehentl, Zolle, Primen leicht bewerkstelligen, oder eine schon vorhandene prüfen.

II. Zusatz: Lachterschnüre können jede beliebige Länge haben, indeß macht sie der Einfluß der Witterung zu einem sehr trüglichen Maaßstabe, wesentliche Dienste aber leisten sie zur Bestimmung der Richtung einer abzumessenden Länge.

III. Zusatz: Bey der Lachterkette müssen alle Glieder gleich lang seyn, und bey dem Gebrauche muß genau nachgesehen werden, ob keines derselben verborgen, oder überschlagen ist, endlich überhaupt die Kette öfters geprüfet werden, weil durch den Gebrauch die Glieder sich verziehen.

§ 93.

Aufgabe:

Eine gegebene söhlige oder donlägige Linie zu messen.

I. Auflösung vermittels der Lachterschnur.

1. Man spanne längst der zu vermessenden Linie, oder nach einer mit ihr parallelen Richtung die Lachterschnur,

2. wiederhole solches, bis die ganze Linie theilweise vermessen ist;

3. Bleibt am Ende ein Rest, welcher weniger als ein Lachter beträgt, so bestimme man solchen durch den Lachterstab in Zehent-Theilen, Zollen und Primen.

4. Multipliciret man nun die bekannte Länge der Lachterschnur mit der Zahl, wie oft selbe angelegt wurde, und addirt dem Producte obigen Rest, so giebt

5. die Summe die verlangte Länge der zu vermessenden Linie.

II. Auflösung vermittels der Lachterkette.

6. Man spanne eine Schnur in der Richtung der zu vermessenden Linie, und

7. bestimme mit der Lachterkette, die man, so oft es angeht, längst dieser Schnur anleget, die Länge derselben,

8. bleibt ein Rest, der weniger als ein Lachter beträgt, so giebt man solchen durch den Lachterstab in Zehentl Zollen und Primen an.

9. Ist nun die zu vermessende Linie länger, als die längst selber gespannte Schnur, so muß das

ganze Verfahren so oft, als es angeht, wiederholet, und

10. die gefundenen Größen der einzelnen Theile am Ende in eine Summe gebracht werden, welche

11. die gesuchte Länge angiebt.

III. Auflösung vermittels zweyer ganzen oder halben Lachterstäbe.

12. Man spanne in der Richtung der gegebenen Linie eine Schnur, und halte

13. vom Anfangspuncte der Linie längst der Schnur einen ganzen oder halben Lachterstab (ein halber ist bequemer, und läßt sich genauer anlegen, da man beyde Enden desselben leichter bemerken kann),

14. Unmittelbar an diesem Stabe legt ein Gehilfe längst der Schnur den andern Stab an, und so wird

15. durch wechselweises Anlegen die Länge der Schnur bestimmt.

16. Ist die gegebene Linie länger, so muß das Verfahren wiederholet, aber genau da wieder angefangen werden, wo man aufhörte.

17. Daß hier genau die Länge der einzelnen Theile bemerkt werden müsse, versteht sich von selbst, ihre Summe giebt endlich die gesuchte Länge der gegebenen Linie.

I. Zusatz: Die erste Auflösung ist wegen der Dehnbarkeit der Schnur selten anwendbar, ausser wo es nur um eine beyläufige Bestimmung zu thun ist.

II. Zusatz: Die dritte Auflösung ist nicht nur bequem, sondern sie gewährt auch die größte Genauigkeit, und ist daher den übrigen beyden vorzuziehen.

III. Zusatz: Um die Schnur in der angezeigten Richtung zu spannen, bedienet man sich entweder messingener Holzschrauben, die an schon vorhandene, oder dazu eigends angebrachte Pflöcke eingeschraubt werden, oder sogenannter Meßböcke.

Anmerkung: Die Beschreibung der Meßböcke enthält die am Ende beygefügte Abhandlung des Herrn Landesdirektionsrathes von Voith.

§. 94.

Aufgabe:

Eine seigere Linie zu messen.

Auflösung:

1. Man befestige an einer Schnur ein Senkbley, und halte solche am Anfangspuncte der gegebenen Linie an.

2. Messe durch einen Lachterstab die Länge dieser Schnur theilweise so, daß

3. vermittels des Senkels die Schnur immer die nemliche Spannung behält,

4. Die Summe giebt die gesuchte Länge der gegebenen seigern Linie,

Zusatz: Die eben angeführte Methode die Länge einer gegebenen seigern Linie zu messen, heißt in der Bergsprache solche abseigern.

§. 95.

Um gegebene Linien im verjüngten Maaße aufzutragen, braucht man

a) einen verjüngten Lachtermaaßstab, wozu ein jeder tausendtheiliger verjüngter Maaßstab dient dessen Einrichtung und Verfertigung aus §. 185 Geometr. hinlängiich bekannt ist;

b) Lineal, Handzirkel, Reißfedern, Reißbret u. s. w.

Anmerkung: Theilet man das Lachter nicht in Zehentl, sondern Achtl, so läßt sich leicht die zweckmäßige Abänderung im oben angeführten 185sten §. treffen.

II. Abschnitt.

Vom Gradbogen.

§. 96.

Beschreibung: (Fig. 36).

Die Wasserwage oder der Gradbogen ist ein aus dünnem Messingblech verfertigter Halbkreis, welcher durch den Radius CD in 2 Quadranten, und jeder Quadrant in ganze und halbe Grade getheilet ist, die Eintheilung fängt bey D an, und endet bey A auf der einen, und bey B auf der andern Seite, das ist, am ersten Puncte kömmt o, bey letzterm 90° zu stehen; im Mittelpuncte C wird vermittels eines kleinen Zäpfchens ein Senkl CP aufgehangen, welcher an den Abtheilungen die Anzahl der Grade angiebt. Endlich sind bey H und K zwey gleich lange, gegen einander gebogene Hacken angebracht, vermittels welchen der ganze Gradbogen an eine gespannte Schnur so aufgehangen werden kann, daß der Diameter ACB genau mit solcher parallel läuft; die in der Mitte der Hacken angebrachte Einschnitte dienen dazu, vermittels einer hölzernen Kluppe den Gradbogen zu erhalten, daß er nicht längst einer sehr geneigten Schnur herabglitschet. Der Diameter darf nie viel mehr, als etwa einen bairischen Fuß lang seyn, weil sonst der Gradbogen zu schwer, mithin unbrauchbar würde.

§. 97.

Aufgabe:

Die Neigung der Linie MN (Fig. 25) zu finden.

Auflösung:

1. Man spanne längst der Richtung NM eine Schnur,

2. hänge daran den Gradbogen, bemerke

3. Die Anzahl der Grade sowohl, als nach dem Augenmaaße die Anzahl der Minuten, welche der Senkel bey F abschneidet, das ist, welche der Bogen DF hält, so ist dieses die gesuchte Neigung.

Beweis:

4. Der Gradbogen befindet sich in einer Ebene der Linie MN, und des Lothes CF, also in einer seigern Ebene durch MN (§. 67, I. Zus.),

5. ist nun ON eine in dieser Ebene gezogene söhlige Linie, so ist MNO die Neigung von MN (§. 168, Geometrie).

6. Ferner bey richtiger Structnr der beyden Hacken ist AB ∥ MN, mithin AnO = MNO

7. Endlich AnO = 90° — nCF = DCF; folglich

8. DCF = AnO = MNO, das ist, der Bogen DF bestimmt die Neigung von MN.

§. 98.

Wesentliche Eigenschaften des Gradbogens (Fig. 36) sind:

a) Daß der Senkel genau im Mittelpuncte C angebracht ist, und frey spielen kann,

b) daß die Eintheilung richtig, und

c) die gezogenen Theilungsstriche fein sind,

d) endlich müssen beyde Hacken gleich lang seyn, damit der durch 90° gezogene Diameter ACB mit der Schnur parallel laufe.

§. 99.

Aufgabe:

Zu untersuchen, ob der Senkel genau im Mittelpuncte des Gradbogens sich befinde (Fig. 36).

Auflösung:

1. Man ziehe zwischen den Theilen, wo 90° verzeichnet steht, eine gerade Linie AB, so muß in ihr der Aufhängungspunct liegen;

2. Nun theile man solche in zwey gleiche Theile, oder nehme die Sehne von 60°, so bekömmt man den Radius des Gradbogens, wo sich nun

3. leicht prüfen läßt, ob der Punct C von A und B in dieser Entfernung liege, also der wahre Mittelpunct ist, oder nicht.

§. 100.

Aufgabe:

Die Eintheilung des Randes am Gradbogen (Fig. 36) zu prüfen.

Auflösung:

1. Vermittels eines guten Stangenzirkels nehme man auf der Seite AD, die Sehne dieses Quadrantens, und vergleiche sie mit der Sehne des andern Quadrantens BD, so ergiebt sich, ob
2. D, oder das Zeichen o genau in der Mitte des Halbkreises liegt, oder nicht.
3. Dann nehme man die Sehne von 45°, und untersuche, ob sie sich viermal im Halbkreise, und eben so die Sehne von 60°, oder der Halbmesser dreymal auftragen lasse.
4. Untersuchet man endlich mit dem Halbmesser der Ordnung nach immer zwey Abtheilungen, die um 60° von einander entfernt sind, so findet man, ob die Eintheilungen richtig oder unrichtig sind, je nachdem dieser Radius als Sehne entspricht, oder nicht.

§. 101.

Aufgabe:

Die Größe des Fehlers anzugeben, wenn man bey voriger Prüfung des Gradbogens gefunden hat, daß z. B. bey F (Fig. 26) die Eintheilung unrichtig ist.

Auflösung:

1. Die Größe des Bogens EF sey vermöge der unrichtigen Theilung in Graden, Minuten u. s. f. $=$ m, wo also m die Anzahl der zwischen E und F am Rande angegebenen Grade, Minuten u. s. f. bezeichnet; man fände aber.

2. Bey der Untersuchung (§. 100), daß diese Größe von m nicht dem Bogen FE, sondern EG zukomme, oder EG $=$ m; mithin

3. FG der durch die unrichtige Abtheilung entstandene Fehler sey.

4. Um nun die wahre Größe n des Bogens EF in Graden, Minuten u. s. f. zu bestimmen, so messe man mit größter Schärfe

5. den Halbmesser des Gradbogens, und die Sehne EF durch einerley Maaß, nun sey ersterer, oder CE $=$ R, ferner letztere oder FE $=$ c, so ist für den Radius r der trigonometrischen Tabellen

6. $\sin. \frac{1}{2} ECF = \frac{c}{2R} . r$ (§. 327, Trigonom.), folglich der halbe, mithin auch der ganze Winkel ECF, oder der Bogen EF in Graden, Minuten u. s. w., also

7. die Zahl n (Nr. 4) gefunden.

8. Nun ist FCG $=$ FCE $-$ GCE $=$ n $-$ m, folglich

9. erhält man die Größe des Fehlers, wenn man von der Zahl n Nr. 7 die Zahl m (Nr. 1) abzieht, wenn man $n > m$ fände,

10. Ist aber $n < m$, so daß eigentlich dem Bogen EI die Größe m zukömmt, so ist

11. der Fehler $FCI = m - n$.

Zusatz: Wenn man auf diese Art die Fehler aller bey einem Gradbogen unrichtig gefundenen Theilungsstriche berechnet, und in eine Tabelle gebracht hat, so kann man auch mit diesem unrichtig getheilten Gradbogen die Neigung einer Linie bestimmen.

§. 102.

Aufgabe:

Die Größe des Fehlers anzugeben, welcher vom Mangel an Feinheit der Theilungslinien des Gradbogens entspringt.

Auflösung:

1. Man schätze nach dem Augenmaaße die Dicke eines Theilungsstriches z. B. in Zehent-Theilen einer Linie eines bekannten Fußmaaßes; ihre geschätzte Größe sey $= a$.

2. Nun bestimme man die Größe r des Halbmessers vom Gradbogen im nemlichen Maaße, so ist

3. der Fehler in Secunden ausgedrückt

$$= 206265 \cdot \frac{a}{r}.$$

Beweis:

4. Wenn x die Größe des Fehlers in Secunden ausgedrückt bezeichnet, so ist

5. $2 r \pi : a = 1296000'' : x''$ (§. 129. II. Zus. Geometrie)

$$r \pi : a = 648000 : x, \text{ mithin}$$

6. $$x = \frac{648000'}{3,141592} \cdot \frac{a}{r}$$ (§. 27. Geom.)

$$= 206265 \frac{a}{r}.$$

Zusatz: Wenn der Halbmesser 5 Zolle, mithin 50 Linien, und die Dicke eines Theilstriches 0,1 Linie hält, so ist

$$x = \frac{0,1}{50} 206265 = 412,53 \text{ Secunden}$$

$= 6'52,53''$. Bey einer Dicke von 0,01 Linie ist für eben den Halbmesser

$$x = \frac{0,01}{50} 206265 = 41,253 \text{ Secunden.}$$

§. 103.

Aufgabe:

Den Fehler β zu bestimmen, und die wahre Neigung α einer vorlägigen Linie anzugeben, wenn die

Hacken

Hacken des Gradbogens durch Verbiegung, oder wie immer, eine ungleiche Länge haben.

I. Auflösung;

1. Man nehme eine donlägige Linie MN (Fig. 27), deren Neigung MNO $= \alpha$ anderswoher schon voraus bekannt ist;

2. Nun suche man nach der Anleitung des 97sten §. die Größe des Bogens DF oder Winkels DCF $= \gamma$;

3. Sind nun die Hacken AH und BK ungleich, und zwar AH $>$ BK, so ist

4. der Fehler $\beta = \alpha - \gamma$;

5. Wenn aber AH $<$ BK, so wird

6. der Fehler $\beta = \gamma - \alpha$, mithin

7. Die Neigung $\alpha = \gamma \pm \beta$, je nachdem der Fall Nr. 3, oder Nr. 4 vorhanden ist.

8. Man darf also bey Bestimmung der Neigung einer andern Linie nur diesen einmal gefundenen Fehler β dem Winkel γ addiren, oder davon subtrahiren.

Beweis:

9. Wenn AH $>$ BK (Nr. 3), so kann AB mit MN nicht parallel seyn (§. 51, IV. Zusatz, Geometrie),

metrie), und wird daher mit letzterer verlängert in irgend einem Puncte E zusammenstoßen.

10. Nun ziehe man durch E in der seigern Ebene MNO, in welcher sich auch der Gradbogen vermöge seiner Schwere befindet, die söhlige Linie GE, so ist

11. DCF = AEG (§. 97), das ist

$$\gamma = AEG$$
$$= MEG - MEA$$
$$= MNO - MEA \quad (\S.\ 45,\ II.\ Geom.)$$
$$= \alpha - MEA, \text{ folglich}$$

12. der gesuchte Fehler MEA, oder

$$\beta = \alpha - \gamma \ (Nr.\ 4) \text{ und}$$
$$\alpha = \gamma + \beta \ (Nr.\ 7).$$

13. Wenn aber AH < BK, so läßt sich vermittels einer dazu construirten Figur leicht auf die nemliche Art darthun, daß

14. $\beta = \gamma - \alpha$ (Nr. 6) und
$\alpha = \gamma - \beta$ (Nr. 7).

II. Auflösung:

15. Man hänge nach der Anleitung des 97sten §. den Gradbogen an der Linie MN (Fig. 27), und bemerke DF = γ;

16.

16. Auf die nemliche Art hänge man an eben diese Linie MN (Fig. 28) den Gradbogen verkehrt an, und bemerke DI $= \delta$, so ist

17. die gesuchte Neigung, oder

$$\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \gamma), \text{ und}$$

18. der aus der Ungleichheit der Hacken entstandene Fehler $\beta = \frac{1}{2}(\delta - \gamma)$; wenn AH $>$ BK, im Gegentheile, wenn AH $<$ BK, so ist

$$\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta).$$

Beweis:

19. Bringet man den Gradbogen (Fig. 27) in die Lage (Nr. 15), so ist für AH $>$ BK

20. $\gamma = \alpha - \beta$ (Nr. 11).

21. Hingegen in der verkehrten Lage (Fig. 28) Nr. 16 ist

$$\text{DCI} = \delta = \text{CrO}$$
$$= \text{MNO} + \text{reN} \quad (\S.\ 47,\ \text{VII. Zus. Geometrie})$$
$$= \alpha + \text{reN}.$$

22. Man vergleiche nun die beyden Figuren 27 und 28, und lege a auf A, ab längst AB, so fallen ah längst AH, bk längst BK, mithin h auf H, k auf K, und die beyden Linien ab, hk decken die Linien AB, HK, mithin fallen auch die Durchschnittspuncte derselben, oder e, E aufeinander, folglich ist

23. aeh = AEH; subſtituiret man letztern Winkel in der letzten Gleichung Nr. 21, ſo wird

24. $\delta = \alpha + AEH$
$= \alpha + \beta$; folglich

25. iſt die geſuchte Neigung; oder
$\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \gamma)$, und
$\beta = \frac{1}{2}(\delta - \gamma)$ (§. 86, Arithm.)

26. Wenn aber BK > AH iſt, ſo findet man auf die nemliche Art $\beta = \frac{1}{2}(\gamma - \delta)$.

Zuſatz: Fände man nach der II. Auflöſung DF = γ = 5°; und DI = δ = 5°30′; ſo würde die Neigung MNO = α = 5°15′, und der Fehler β = 15′ ſeyn.

II. Abſchnitt.

Vom Compaſſe.

§. 104.

Beſchreibung:

Wenn im Mittelpuncte eines Kreiſes, welcher in eine beſtimmte Anzahl gleicher Theile getheilet iſt, auf einem Stifte eine bewegliche Magnetnadel angebracht wird, um die Größe eines gegebenen Winkels zu beſtimmen, ſo heißt dieſe Verrichtung ein Compaß.

Zuſatz:

Zusatz: Um die Einwirkung des Windes zu verhindern, und die Magnetnadel überhaupt unbeschädiget zu erhalten, wird solche gewöhnlich in eine hölzerne oder messingene Büxe, welche oben einen Glasdeckel hat, eingeschlossen.

§. 105.

Wesentliche Eigenschaften eines guten Compasses sind:

1. Daß der Stift genau im Mittelpuncte des eingetheilten Kreises senkrecht stehe,

2. daß die Nadel auf der Spitze dieses Stiftes ungehindert spielen könne, oder wie man sagt, daß sie nicht faul sey,

3. daß die Eintheilung des Randes oder Kreislinie richtig und fein sey.

I. Zusatz: Die Prüfung Nr. 1 läßt sich nach §. 99, von Nr. 3 aber nach §. 100 — 102 vornehmen, ob die Nadel munter oder träge sey Nr. 2, giebt unmittelbar die Erfahrung, und dem Fehler abzuhelfen, ist lediglich die Sache des Mechanikus.

II. Zusatz: Beym Bergbau giebt es dreyerley Arten von Compassen:

1) den Setz-
2) den Gruben- oder Berg-
3) den Häng-Compaß.

Anmer-

Anmerkung: Da der Setz- sowohl als Gruben-Compaß bey Vermessungen, wenn sie doch einen erträglichen Grad von Genauigkeit haben sollen, selten oder nie gebraucht werden dürfen, so halte ich's für zweckwidrig, ihre Beschreibung, Gebrauch u. s. w. hier auseinander zu setzen, wem daran liegt, sie näher kennen zu lernen, darf nur die gewöhnlichen Handbücher von der Markscheidekunst, z. B. Waidlers, Böhms, Stiglers und s. w. nachschlagen.

§. 106.

Beschreibung:

Der Hängcompaß (Fig. 37) besteht

1. aus einer runden Kapsel mit einer darin verschlossenen Magnetnadel, der Boden dieser Kapsel, welcher ein Kreis ist, wird durch zwey aufeinander senkrecht stehende Diameter in vier Quadranten nach den vier Weltgegenden auf folgende Art eingetheilt:

   a) An dem Endespuncte eines Diameters wird Septemtrio, oder auch Se.; am andern Endespuncte eben dieses Diameters aber Meridies, oder Me. gesetzet.

   b) Hält man nun diesen Diameter so, daß man Se. vor sich, und Me. zunächst am Leibe hat; so setzet man beym andern Diameter

am Endespuncte auf der linken Seite Oriens oder Or., und zum Endespuncte auf der rechten Seite Occidens oder Occ.

c) Endlich wird jeder Quadrant in 6, mithin die ganze Kreislinie in 24 gleiche Theile oder Stunden (§. 80. b) eingetheilet. Bey Se. wird die Eintheilung angefangen, und gegen Or. zu, von da nach Me., und nun nach Oc. fortgesetzet, und bey Se. wieder vollendet, so daß bey Se. o; bey Or. die Stunde 6, bey Me. aber 12, und bey Occ. die Stunde 18 zustehen kömmt, folglich fallen zwischen Se. und Or. die ersten 6 Stunden, von Or. bis Me. die Stunden von 6 — 12, zwischen Me. — Occ. aber von 12 — 18, endlich von Occ. — Sept. die letzten 6 Stunden, oder 18 — 24 oder o.

d) Jede einzelne Stunde bekömmt nun noch 15 gleiche Theile, mithin die ganze Periphe-rie $24 \cdot 15 = 360$ solche Theile, so daß also der 15te Theil einer Stunde genau einen Grad hält.

2. Dieses Kästchen wird vermittels zweyer Zäpfchen bey Or. und Occ. mit einem Ringe AB so verbunden, daß es sich allemal vermittels seiner Schwere ins Gleichgewicht, mithin in eine solche Lage versetzet.

3. Der Ring AB endlich wird an einem andern, welcher bey H und K zwey Hacken enthält, so befestiget, daß die Linie Se. — Me. in die Ebene des letztern Ringes zu liegen kömmt.

I. Zusatz: Da sich (Nr. 1. d) am Rande nicht wohl kleinere Theile als 15te Theile einer Stunde, das ist, einzelne Grade anbringen lassen, so müssen kleinere Abtheilungen, nemlich Minuten dem Augenmaaße nach geschätzet werden.

II. Zusatz: Ausser den allgemeinen Eigenschaften (§. 105) eines guten Compasses überhaupt, muß vorzüglich die Linie Se. — Me. mit dem Ringe, an welchem die beyden Hacken angebracht sind, in der nemlichen Ebene liegen (Nr. 3).

III. Zusatz: In einigen Orten wird der Kreis (Nr. 1. c.) von Se. — Or. in die Stunden 1 — 6, von Or. — Me. aber 6 — 12, hingegen von Me. — Occ. wieder in die Stunden 1 — 6, und von Occ. — Sept. in die Stunden von 6 — 12, also die Peripherie in zweymal 12 Stunden eingetheilt, und jede Stunde in 8 Theile.

I. Anmerkung: Im Grundr liegt wenig daran, welche Eintheilung, im Falle man einmal daran gewöhnt ist, man wählet, indessen der letztern einen Vorzug einzuräumen, dazu kann ich mich unmöglich verstehen.

II. Anmerkung: Beym Grubencompaß hat ganz die nemliche Eintheilung, hingegen beym Setzcompasse die umgekehrte Ordnung statt, es kömmt nemlich bey letztem Or. auf die rechte, und Occ. auf die linke Seite zu stehen, aber die Stunden werden wieder von Se. gegen Or. zu gezählet.

§. 107.

Aufgabe:

Das Streichen einer gegebenen söhligen oder donlägigen Linie MN zu finden, und zwar für den Anhaltungspunct N.

Auflösung:

1. Man befestige in der Richtung MN eine Schnur und hänge

2. an selbe den Hängcompaß so, daß Se. gegen M, und Me gegen N zu gekehrt ist;

3. Nun beobachte man auf dem Rande, welche Stunde, und wie viele 15te Theile derselben die nördliche Spitze die Magnetnadel abschneidet, den Ueberrest bestimme man dem Augenmaaße nach, so ist

4. dieses das verlangte Streichen.

Beweis: (Fig. 37)

5. Die Ebene des Randes, an welchem sich die Hacken HK befinden, ist seiger.

6.

6. in ihr liegt MN, und die söhlige Linie Se — Me, mithin ist letztere die Sohle der erstern, wenn sie donlägig, oder zu ihr parallel, im Falle NM ebenfalls söhlig ist, folglich

7. hat die Linie Se — Me mit NM gleiches Streichen (§. 85).

8. Nun giebt aber die Magnetnadel am Rande die Größe des letztern Winkels an, und bestimmt zugleich

9. die Weltgegend, denn zeigt die Nadel auf eine Stunde zwischen 0 und 12, oder auf die Seite, wo Or steht, so liegt die Linie Se — Me der Magnetlinie zur Rechten, folglich hat sie ihre Richtung der östlichen Seite zu; weiset hingegen die Nadel auf eine Stunde zwischen 12 und 24, also gegen die Seite Occ, so liegt Se — Me der Magnetlinie zur linken Seite, mithin ist ihre Richtung westlich.

10. In beyden Fällen wird beym Beobachter so eine Stellung vorausgesetzet, daß er Se vor sich, und Me zunächst am Leibe habe.

§. 108.

Aufgabe:

Den Fehler anzugeben, wenn der Diameter Se — Me nicht mit der Schnur in der nemlichen seigern Ebene liegt.

Auflö-

Auflösung: (Fig. 29).

1. Man lasse von der Schnur auf die Kapsel einen Senkel herunter, und bemerke am eingetheilten Rande den Punct A, wo er solchen berührt, so giebt

2. offenbar der Bogen Se — A die Größe des Fehlers an.

3. Will man solchen nicht am Rande nach dem Augenmaaße, sondern durch Rechnung bestimmen, so messe man

4. den Halbmesser der Kapsel sowohl, als die Sehne des Bogens Se — A mit einerley Maaße, ersterer sey = a, letztere = c, so ist

5. $\text{sin. } \frac{1}{2} \text{ SCA} = \frac{c \,.\, r}{2\,a}$ (Trig. §. 327).

Beyspiel:

Fände man a = 2 Zoll, also 22 = 4 Zoll = 40 Lin. und c = 1 Lin., so ist

log. c . r = 10,0000000

log. 2 a = 1,6020600

---

log. sin. $\frac{1}{2}$ SCA = 8,3979400

= log. sin. 1°26′ mithin

der gefundene Fehler SCA = 2°52′.

§. 109.

Beschreibung: (Fig. 30)

Wenn man die Kapsel mit der Magnetnadel eines Hängcompasses, oder einen andern Compaß, dessen Rand wie beym Hängcompasse eingetheilet ist, auf einem Rechtecke ABCD von Holz oder Messing so befestiget, daß die Linie Se — Me zu den größern Seiten AB, CD des Viereckes parallel läuft, so heißt diese Vorrichtung das **Zuleginstrument**, oder der **Zulegcompaß.**

§. 110.

Aufgabe:

Auf dem Papier eine Linie zu verzeichnen, welche ein gegebenes Streichen z. B. in der 22. Stunde hat.

Auflösung: (Fig. 30)

1. Man gebe dem Zuleginstrumente so eine Lage, daß die nördliche Spitze der Magnetnadel genau auf die Stunde 0 oder 24 weiset, mithin in der Richtung Se — Me spielet, und ziehe längst der Seite AB des Rechteckes die Linie AE.

2. Nun drehe man das Instrument um den Punct A so lange, bis die nördliche Spitze der Nadel auf die gegebene Stunde 22 weiset, ziehet man bey dieser Lage längst der Seite AB die gerade Linie Am, so ist sie die verlangte.

Beweis:

Beweis:

3. AE ∦ ae (Nr. 1), also
   m AE = A o a.

4. Am ∦ Se — Me, mithin
   Aoa = San, folglich

5. mAE = San.

IV. Abschnitt.

Von der Eisenscheibe, und ihrem Surrogate, oder vom Vermessen der Winkel, vermittels Schnüre.

§. 111.

Erklärung:

Eine Scheibe, welche so eine Vorrichtung hat, daß sie das Streichen einer Linie ohne Magnetnadel angiebt, heißt eine **Stunden- oder Eisenscheibe.**

I. **Zusatz:** Die Eisenscheibe ist das Surrogat des Hängcompasses, wo nemlich in der Nähe befindliches Eisen die gewöhnliche Richtung der Magnetnadel stöhret.

II. **Zusatz:** Es giebt mehrere Arten von Eisenscheiben, die brauchbarste ist eine Erfindung des Herrn von Oppel.

§. 112.

Beschreibung der Oppelschen Eisenscheibe (Fig. 38).

1. Auf einem runden Teller von Messing, welcher sich vermittels Schrauben befestigen läßt, sind eine kleine Scheibe, und um diese ein Ring so angebracht, daß sich dieser Ring sowohl, als die Scheibe jede abgesondert um den gemeinschaftlichen Mittelpunct drehen lassen.

2. Die kleinere Scheibe ist eben so wie die Büxe des Hängcompasses in die vier Weltgegenden, dann die Peripherie in 24 Stunden, und jede Stunde in 15 gleiche Theile eingetheilet; hält man wieder die Scheibe so, daß Se vorwärts, und Me zunächst am Leibe zu liegen kömmt, so wird Links Or, und Rechts Occ. gesetzet, so wie wieder bey Se, o, oder 24, bey Or die 6te, bey Me die 12te, bey Occ die 18te Stunde zu stehen kömmt.

3. Auf der Ebene dieser Scheibe durch den Diameter Se — Me wird eine Platte von Messing senkrecht gesetzet, an welcher vermittels einer Scharniere ein Arm mit einem Hacken in dieser seigern Ebene um einen Punct beweglich ist, der genau senkrecht über dem Centro der Platte steht.

4. Im Mittelpuncte der Scharniere sind zu beyden Seiten Senkel angebracht, die dazu dienen, die ganze Scheibe genau söhlig zu stellen.

5. Der um diese vorhergehende kleinere Scheibe gelegte concentrische Ring ist ebenfalls in 4 Quadranten nach den Weltgegenden getheilet, aber in umgekehrter Ordnung von Nr. 2; hat man nemlich Se vor sich, und Me zunächst am Leibe, so wird bey gegenwärtigem Ringe Rechts Or, und Links Occ gesetzet.

6. An diesem Ringe wird endlich bey Se ein Index oder ein Vernier angebracht, wodurch auf vorhergehender Stundenscheibe die Stunden, oder 15te Theile derselben bestimmt werden. Endlich können ein Paar eingeschraubte Zäpfchen dazu dienen, den Ring nach Belieben zu drehen.

I. Zusatz: Nach Herrn von Oppels Angabe wird am Ringe der Index bey Me. befestiget, und die kleinere Scheibe in zweymal 12 Stunden nach sächsischer Art eingetheilet.

II. Zusatz: Bey Vermessungen vermittels der Eisenscheibe ist's vortheilhaft, wo nicht nothwendig, zwey derley Scheiben an der Hand zu haben.

§. 113.

Aufgabe:

Wenn AB, BC, CD drey unmittelbar aufeinanderfolgende Linien sind, und das Streichen der ersten Linie AB gegeben ist, das Streichen der beyden andern Linien BC und CD vermittels der Eisenscheibe zu finden.

Auflö-

Auflösung:

1. Am Ende der ersten Linie AB (Fig. 31) bringe man eine Eisenscheibe, diese soll in der Folge die erste heißen, genau in eine söhlige Lage, so zwar, daß

2. der Punct B mit dem Mittelpuncte der Scharnier, um welche sich der an der Eisenscheibe angebrachte Arm drehet, genau zusammenfällt;

3. In dieser Stellung befestige man durch Schrauben den Teller der Scheibe, und biege

4. den Arm auf der kleinern beweglichen Scheibe auf die Seite, wo Me steht, spanne die bey A befestigte Schnur vermittels des am Arm befindlichen Hackens nach der Richtung AB, so drehet diese die kleine bewegliche Scheibe um ihren Mittelpunct so, daß die söhlige Linie Se — Me in die Richtung BA fällt.

5. Ferner drehe man um diese Scheibe den Ring vermittels der Zäpfchen, bis der Index oder Vernier die nemliche Stunde weiset, in welcher AB streichet.

6. Nun löse man die Schnur bey A auf, biege den Arm auf die entgegengesetzte Seite der Scheibe nach B. Se, und (Fig. 32).

7. Befestige bey C die zweyte Eisenscheibe wie Nr. 1 — 4, so wird

8. die nach der Richtung BC gespannte Schnur die erste kleine Scheibe in so eine Lage um ihren Ring drehen, daß der Index die Stunde weiset, in welcher die Linie BC streichet.

9 Giebt man endlich dem Index der zweyten Scheibe die Richtung, daß er diese eben gefundene Stunde weiset, und

10. löset die Schnur bey B, bieget den Arm der zweyten Scheibe in die Richtung C. Se, spannet die Schnur nach CD, so zeigt wieder der Index das verlangte Streichen der Schnur oder Linie CD.

Beweis: I. Fall, wenn alle gegebene drey Linien AB, BC, CD söhlig sind.

11. Wenn bey A, wo wegen Entfernung des Eisens der Hängcompaß noch gebraucht werden darf, PQ die Richtung der Magnetnadel, und P die nördliche Spitze bezeichnet, so ist durch den Winkel PAB das Streichen der ersten Linie AB, oder Ab gegeben (§. 85).

12. Giebt man nun (Fig. 31) der ersten Scheibe in B die Lage (Nr. 1 — 5), so ist pBb, oder vielmehr pβb, wo β den Mittelpunkt der Scheibe bezeichnet, = PAB, mithin pq ∥ PQ, das ist pq, oder Se — Me des Randes stellet die Richtung der Magnetnadel, und p oder der Index bey Se am Rande die nördliche Spitze derselben vor.

13. Durch die Vorrichtung Nr 6—8 (Fig. 32) bestimmt der Index den Winkel pBC, das ist, den Winkel, welchen die söhlige Linie BC mit dem nördlichen Theile der Nadel Bp gegen die Ostseite zu einschließet, folglich das Streichen der Linie BC.

14. Auf der zweyten Scheibe ist aus Nr. 9

pCγ = pBC, mithin stellet wieder pq, oder Se — Me an der zweyten Scheibe die Magnetnadel, und der Index die nördliche Spitze derselben vor, folglich giebt

15. aus Nr. 10 der Winkel pCD das gesuchte Streichen der söhligen Linie CD.

Beweis: Des IIten Falles, wenn die gegebenen Linien donlägig sind.

16. Man stelle sich durch die gegebenen Linien AB, BC, CD sowohl, als durch PQ, pq seigere, und durch die Puncte A, B, C söhlige Ebenen vor, und

17. Ar (Fig. 33) sey die Sohle von AB, so ist durch das Streichen derselben der Winkel PAr gegeben.

18. Vermög Nr. 1 — 5 ist der söhlige Winkel pβb = PAr.

19. Schneiden daher die seigern Ebenen durch pq und AB die söhlige Ebene durch A in mn und

Ao,

Ao, ſo iſt βb # ro; pq # mn (§. 172, II. Zuſ. Geometrie), mithin

20. pβb = mro (§. 169, Geometrie) = PAr (Nr. 18), alſo

21. mn # PQ # pq; das iſt, pq ſtellet wieder die Maguetnadel, und p ihre nördliche Spitze vor.

22. Durch die Vorrichtung Nr. 6 — 8 (Fig. 32) behält pq dieſe Lage unverändert, und Bc iſt zur Sohle von BC parallel, folglich giebt

23. der Winkel pBc, oder der Index das Streichen der donlägigen Linie BC.

24. Auf die nemliche Art läßt es ſich für die folgende Linie CD darthun, mithin das Verfahren von Nr. 8 — 10 rechtfertigen.

Anmerkung: Die Auflöſung ſowohl, als ihr Beweis läßt ſich durch wirkliche Anwendung einer Eiſenſcheibe weit faßlicher, und zum Theil auch gründlicher erklären und einſehen; in der Auflöſung ſowohl, als im Beweiſe des Iſten Falles konnten die Puncte B, β nicht wohl deutlich unterſchieden werden, erſterer iſt im Mittelpuncte der Scharniere, letzterer liegt im Mittelpuncte der Scheibe, und eben ſo iſt iſt's bey der zweyten Scheibe.

I. Zuſatz: Wäre die Scheibe in zweymal 12 Stunden getheilet, und der Index am Rande bey Me

angebracht, so läßt sich die Auflösung der Aufgabe sowohl, als ihr Beweis leicht aus den angeführten ableiten.

II. Zusatz: Will man vermittels der Eisenscheibe den söhligen Winkel ABC selbst finden, so muß man (Fig. 31) der kleinern Scheibe sowohl, als dem Rande so eine Lage geben, daß die Linie Me — Se an beyden in die Richtung BA kömmt; dann wird die Schnur nach der Richtung BC gespannet, aber der Arm bleibt in der vorigen Lage gegen B — Se gebogen, so giebt der Index den gesuchten söhligen Winkel ABC.

III. Zusatz: Wenn eine Eisenscheibe alle wesentliche Eigenschaften (§. 112) hat, die ihr auch ein geschickter Mechanikus geben kann, so giebt sie mit eben der Zuverlässigkeit das Streichen der Linien, wie der Hängcompaß selbst, und, in wie ferne die Größe der Scheibe von der Willkühr des Mechanikus abhängt, mithin auch ihre kleinere Abtheilungen als Grade angezeiget, und durch den Index, oder noch genauer durch einen Vernier bestimmet werden können, mehr Schärfe als jener: hingegen sie söhlig zu stellen, oder ihr die oben Nr. 1 — 3 vorgeschriebene Lage zu geben, hat große Schwierigkeiten, daher schlagen einige Mathematiker nachstehende Methode, Winkel durch bloße Schnüre zu messen, als Surrogat der Eisenscheibe vor.

§. 114.

§. 114.

Aufgabe: (Fig. 34.)

Wenn man beliebige Stücke AC, BC der beyden Schenkel eines Winkels C vom Scheitel aus, nebst der Entfernung AB messen kann, den Winkel zu finden.

Auflösung:

1. Man messe obige 3 Linien AB, AC, BC, und

2. bezeichne im Dreyecke ABC mit den größern Buchstaben die Winkel, und mit den kleinern c, b, a ihre opponirten Seiten, so ist

3. $\sin.C = \frac{\sqrt{[(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)]}}{2ab}$ r

(§. 339, Trigon.)

4. Fände man $AC = BC$, das ist $b = a$, so wird

5. $\sin.\frac{1}{2}C = \frac{c \cdot r}{2b}$ (§. 327, Trigonom.)

I. Zusatz: Da es in der Ausübung größtentheils von der Willkühr des Markscheiders abhängt, die Größe von a und b zu bestimmen, so ist's sehr vortheilhaft beyde gleich, und jede ein Lachterlang zu nehmen, so ist dann allemal $a = b = 1000$ Primen. Mißt man nun $AB = c$, und drückt sie in Primen aus, so kann man wie §. 355, III. Aufl. Trigon. vermittels Sinus Tabellen unmittelbar $\frac{1}{2}C$ finden.

II. Zusatz: Fände man für a = b = 1000 Primen, die Seite c = 1147 Primen, so ist $\frac{1}{2}$ c = 573,5 Primen, mithin aus den Tabellen $\frac{1}{2}$ C = 35°, folglich C = 70°.

§. 115.

Aufgabe (Fig. 35).

Wenn sich von den Schenkeln CA, CB eines Winkels C zwey beliebige Theile AE, BD, aber nicht vom Scheittel aus, und überdieß die Entfernungen jeder zwey von den vier Puncten A, E, B, D messen lassen, den Winkel C finden, welchen die beyden Schenkel einschließen.

Auflösung:

1. Man messe die Linien AE, BD, BA, BE. AD, so sind

2. im △BAD alle Seiten bekannt, drücken also wieder B, A, D die Winkel, und b, a, d die opponirten Seiten aus, so ist

3. $\sin. B = \frac{\sqrt{[(b+a+d)(a+d-b)(b+d-a)(b+a-d)]}}{2ad}$,

4. Eben so sind im △BAE alle 3 Seiten gegeben, bezeichnen abermal B, A, E die Winkel, und b, a, e ihre entgegenstehende Seiten, so ist

5. $\sin. A = \frac{\sqrt{[(b+a+e)(a+e-b)(b+e-a)(b+a-e)]}}{2be}$ r

6. Da man nun vom △ABC die beyden Winkel B, A gefunden hat, so ist auch

$C = 180° - (B + A)$ gefunden.

Zusatz: Nimmt man in der Ausübung, wo es thunlich ist, $AE = BD = AB$, so ist

im △BAD, $\sin. \frac{1}{2} B = \frac{br}{2d}$, und

im △BAE $\sin. \frac{1}{2} A = \frac{ar}{2e}$, folglich die Berechnung Nr. 3 und 5 um vieles erleichtert.

§. 116.

Aufgabe: (Fig. 40)

Es sind die Längen zweyer donlägiger Linien $AC = BC$, ihre Neigungen ACE, BCF, nebst der Linie AB gegeben, man suchet den Winkel ECF, welchen ihre Sohlen einschließen.

Auflösung:

1. Man berechne aus AC, und ACE die Seigerteufe AE und Sohle CE (§. 323, Trigonom.)

2. Eben so aus BC und BCF die Seigerteufe BF, und Sohle CF.

3. Nun ziehe man die kleinere Seigerteufe von der größern ab, das ist, nehme AG = AE — BF.

4. Aus AB und AG berechne man BG (§. 325, Trigonometrie).

5. Nun ist BF ∦ AE (§. 165, I. Geom.), mithin

$$BF \overset{=}{\#} GE,$$ folglich

6. BG = FE (§. 51, VII. Zus. Geom.)

7. Aus CE (Nr. 1), CF (Nr. 2), und FE (Nr. 6), berechne man

8. den Winkel ECF (§. 339, Trigon.)

I. Zusatz: Wenn die eine Linie z. B. BC söhlig, mithin BCF = 0, so ist BF = 0, folglich AG = AE (Nr. 3).

II. Zusatz: Fallen beyde Linien zugleich, so bleibet die gegebene Auflösung ganz unverändert.

III. Zusatz: Wenn hingegen die eine CA steigt, und die andere CB fällt, so wird AG = AE + BF, sonst bleibt alles wie vorher.

§ 117.

Beyspiel zur vorhergehenden Aufgabe (Fig. 40).

Aus AC = BC = 1000, AB = 1224, ACE = 50°30′, BCF = 23°30′ den Winkel ihrer Sohlen ECF = C finden

Auflösung:

1. Die Seigerteufe $AE = \frac{AC \cdot \sin. ACE}{r}$

$= 771{,}62$

2. die Sohle $CE = \frac{AC \cdot \cos. ACE}{r} = 636{,}08$

3. die Seigerteufe $BF = \frac{BC \cdot \sin. BCF}{r}$

$= 398{,}75$

4. die Sohle $CF = \frac{BC \cdot \cos. BCF}{r} = 917{,}06$

mithin

5. $AG = AE - BF = 771{,}62 - 398{,}75$

$= 372{,}87.$

6. Im Dreyecke ABG ist

$\sin. ABG = \frac{AG \cdot r}{AB} = \sin. 17°44'$, und also

7. $BG = \frac{AB \cdot \cos. ABG}{r} = 1165{,}85 = FE.$

8. Bezeichnet man im Dreyecke ECF mit diesen grösseren Buchstaben die Winkel, und mit e, c, f ihre opponirten Seiten, so ist

9. $\sin. C = \frac{\sqrt{[(c+e+f)(e+f-c)(c+f-e)(c+e-f)]}}{2ef} r$

$= \frac{ur}{2ef}$. (S. 339, I. Zus. Trig.)

10.

10. Nun ist EF = c = 1165,85 (Nr. 7)
CF = e = 917,06 (Nr. 4)
CE = f = 636,08 (Nr. 2), mithin

11. log. (c+e+f) = log. 2718,99 = 3,4344076
log. (e+f−c) = log. 387,29 = 2,5880363
log. (c+f−e) = log. 884,87 = 2,9468795
log. (c+e−f) = log. 1446,83 = 3,1604175

folglich log. u^2 = 12,1297409
und log. u = 6,0648704

12. Ferner log. 2 = 0,3010300
log. e = log. 917,06 = 2,9623978
log. f = log. 636,08 = 2,8035117

also log. 2 e f = 6,0669395

13. Nun ist log. u r = 16,0648704 (Nr. 11)
log. 2 e f = 6,0669395

mithin log. sin. C = 9,9979309 (Nr. 9).

14. Da aber dieser Logarithmus sowohl für den Sinus des spitzigen Winkels 84°24′40″, als dessen stumpfen Nebenwinkel 95°35′20″ gehört, so verzeichne man

15. im verjüngten Maaße aus den 3 Seiten c, e, f ein Dreyeck, wo man bloß durch das Augenmaaß finden wird, daß im gegebenen Falle C stumpf, mithin

16.

16. der Winkel, welchen die Sohlen einschließen, oder $C = 95°35'20''$ ist.

§. 118.

Eine andere bequemere Auflösung der Aufgabe vom 116. §.

1. Man setze die gegebene Neigung $ACE = \beta$, und $BCF = \alpha$.

2. Aus AC, BC, und AB berechne man (§. 114) den Winkel $ACB = d$, so ist

3. wenn man den gesuchten söhligen Winkel $ECF = D$ setzet,

4. $$(\sin. \tfrac{1}{2} D)^2 = \frac{\sin. \tfrac{1}{2}(d + (\beta - \alpha)) \sin. \tfrac{1}{2}(d - (\beta - \alpha))}{\cos. \alpha \cos. \beta} r^2.$$

Für den $\sin. \tfrac{1}{2} D$ uehme man den spitzigen Winkel, so ist D der gesuchte.

Beweis: (Fig. 41).

5. Man beschreibe aus C mit CA in der söhligen Ebene ECF einen Kreis, welcher die Sohle CE verlängert in H, und die verlängerte Sohle CF in K schneidet, so ist der Bogen HK das Maaß des gesuchten Winkels ECF.

6. Aus eben dem Puncte C, mit eben dem Halbmesser CA, beschreibe man in den seigern Ebenen ACE,

ACE, BCF Kreise, welche also einander im Pole D des vorhergehenden söhligen Kreises schneiden (§. 379, I. Zus. sph. Trigon.)

7. die beyden Bögen DH, DK sind Quadranten (§. cit. V. Zusatz), ferner BK = BCF = α; AH = ACE = β; und

8. der Bogen HK ist dem sphärischen Winkel D gleich (§. 381, II. Zus. sph. Trigon.)

9. Nun ziehe man noch aus C mit CA in der Ebene ACB einen Kreis, so ist der Bogen AB = ACB, und

10. ADB ein sphärisches Dreyeck.

11. Bezeichnet man die Winkel dieses Dreyeckes mit A, B, D, und ihre opponirten Seiten der Ordnung nach mit a, b, d, so ist

12. $DB = DK - BK$; oder $a = 90° - \alpha$
$DA = DH - AH$; oder $b = 90° - \beta$ } (Nr. 7.)

$AB = ACB = d$, mithin

13. sind im $\triangle ADB$ alle Seiten (Nr. 1 und 2) gegeben, und der Winkel D desselben = KH (Nr. 8) ist dem gesuchten söhligen Winkel ECF gleich.

14. Nun ist

$$(\sin. \tfrac{1}{2} D)^2 = \frac{\sin. \frac{1}{2}(d + a - b) \sin. \frac{1}{2}(d + b - a)}{\sin. a \cdot \sin. b} r^2$$

(§. 416, sph. Trigon.)

15.

15. Ferner sin. a = cos. α; (Nr. 12).
sin. b = cos. β; und

16. $d+a-b=d+90°-\alpha-90°+\beta=d+(\beta-\alpha)$
$d+b-a=d+90°-\beta-90°+\alpha=d-(\beta-\alpha)$,
folglich

17. $(\sin.\frac{1}{2}D)^2$
$$= \frac{\sin.\frac{1}{2}(d+(\beta-\alpha)) \cdot \sin.\frac{1}{2}(d-(\beta-\alpha))}{\cos.\alpha \cdot \cos.\beta} (r^2.$$

I. Zusatz: Wenn CA zwar steiget, aber CB söhlig ist, so wird $\alpha = 0$, cos. α = cos. 0 = r, mithin

$$(\sin.\frac{1}{2}D)^2 = \frac{\sin.\frac{1}{2}(d+\beta) \cdot \sin.\frac{1}{2}(d-\beta)}{r \cdot \cos.\beta} r^2,$$

wo $\frac{1}{2}$ D allemal spitzig ist (II. Tabelle, V. Fall, sph. Trigonom.)

II. Zusatz: Fallen die beyden Linien, so bleibt obige Formel zur Auflösung ganz unverändert.

III. Zusatz: Steiget die eine Linie CA, und die andere CB fällt, so wird (Nr. 12)
DB = DK + BK, also
$a=90°+\alpha$; mithin sin. a=cos.α, und
$d+a-b=d+90°+\alpha-90°+\beta=d+(\beta+\alpha)$
$d+b-a=d+90°-\beta-90°-\alpha=d-(\beta+\alpha)$,
folglich

(sin.

$$(\text{fin. } \tfrac{1}{2} D)^2 = \frac{\text{fin. } \tfrac{1}{2}(d+(\beta+\alpha)) \cdot \text{fin. } \tfrac{1}{2}(d-(\beta+\alpha))}{\cos. \alpha \cdot \cos. \beta} r^2.$$

§. 119.

Beyspiel für die vorhergehende Auflösung (Fig. 41.):

Aus AC = BC = 1000, AB = 1224, ACE = 50°30′, BCF = 23°30′ den söhligen Winkel ECF finden.

Auflösung:

1. $\frac{1}{2}$ ACB = 37°44′ (§. 114, I. Zusatz), mithin (§. 118) ACB = d = 75°28′

2. Ferner ACE = β = 50°30′
   BCF = α = 23°30′

   mithin $\beta - \alpha$ = 27°, und

3. $d + (\beta - \alpha)$ = 102°28′, also
   $\frac{1}{2}(d + (\beta - \alpha))$ = 51°14′

4. $d - (\beta - \alpha)$ = 48°28′, und
   $\frac{1}{2}(d - (\beta - \alpha))$ = 24°14; folglich

5. log. sin. $\frac{1}{2}(d+(\beta-\alpha)) = 9{,}8919289$

log. sin. $\frac{1}{2}(d-(\beta-\alpha)) = 9{,}6132641$

log. $r^2 = 20{,}0000000$

compl. dec. log. cos. $\alpha = 0{,}0376022 - 10$

c. dec. log. cos. $\beta = 0{,}1964895 - 10$

Mithin §. 118, Nr. 4.

log. $(\text{sin. } \frac{1}{2} D)^2 = 19{,}7392847$

log. sin. $\frac{1}{2} D = 9{,}8696423$

(§. 230, Arithm.)

6. Da nun der entsprechende Winkel allemal spitzig ist, so wird $\frac{1}{2} D = 47°47'28''$, folglich

7. der gesuchte söhlige Winkel $D = ECF = 95°34'56''$.
Man vergleiche §. 117, Nr. 16.

Anmerkung: In den Fällen, wo sich die Seite AB messen läßt, da enthalten die §. 114—119 allerdings ein vollgiltiges Surrogat der Eisenscheibe; aber es giebt nur zu viele Fälle, wo dieses nicht angeht, wo also die Eisenscheibe, oder ein anderes gleichgeltendes Instrument nicht entbehret werden kann.

V. Abschnitt.

Vom Winkelweiser.

§. 120.

Beschreibung (Fig. 39).

Der Winkelweiser besteht

1. Aus einem ungefähr 14 Zoll langen Richtscheite AB, welches

2. um einen Stift an einem Klötzchen C auf- und abwärts beweglich ist.

3. Am Ende des Stiftes sind Schraubengewinde eingeschnitten, woran eine Mutter bey E passet.

4. Durch das Klötzchen ist bey D ein Loch, damit das ganze Instrument auf einem Pfahle vermittels der Holzschraube G befestiget werden kann.

5. Auf der obern Seite des Richtscheites sind zwey Platten senkrecht angebracht, von welchen H die Ocular-, und I die Objektivdiopter enthält, so daß

6. bey der söhligen Lage des Klötzchens C, die Visirlinie HI in der nemlichen seigern Ebene bleibt, wenn das Richtscheit auf- oder abwärts bewegt wird.

7. Auf der untern Seite des Richtscheites endlich sind in den verlängerten Dioptерplatten zwey Oeffnungen

gen L, F so beschaffen, daß die durch selbe gezogene, und durch die Schraube K gespannte Schnur, zur Visierlinie HI parallel ist.

8. Statt der Dioptern könnte vielleicht ein Tubus mit Vortheil angebracht werden.

§. 121.

Aufgabe:

Aus einem gegebenen Puncte M über Tage eine gerade Linie MN abzustecken, welche eine gegebene Neigung und bestimmtes Streichen hat.

Auflösung:

1. Man schraube den Winkelmesser auf eine durch M gehende söhlige Ebene, so daß

2. zugleich dieser Punct M mit der Visirlinie in einer seigern Ebene liegt, und der Winkelweiser um D gedreht werden kann.

3. Vermittels der Schraubenmutter E gebe man dem Richtscheite ungefähr eine söhlige Lage, und hänge

4. an die Schnur LK den Hängcompaß so, daß Sept. gegen L, und Mer. gegen K gekehrt ist.

5. Nun drehe man den Winkelweiser um D, bis die nördliche Spitze der Nadel in der gegebe-

nen

nen Stunde streichet, dann wird solcher bey D befestiget, und der Hängcompaß weggenommen.

6. Man hänge den Gradbogen an die Schnur, lüfte in etwas die Schraubenmutter E, und bewege das Richtscheit so lange auf- oder abwärts, je nachdem MN steigen oder fallen soll, bis der Gradbogen die gegebene Neigung anzeiget; in dieser Lage wird die Schraubenmutter wieder angezogen, und das Richtscheit befestiget.

7. Nun trete man hinter die Ocular-diopter H, und visire nach einem in die Visirlinie HI seiger gesteckten Pfahle, welcher etwa 8 bis 10 Lachter vom Puncte entfernt seyn kann; und bemerke den treffenden Punct.

8. Von diesem Puncte seiger abwärts nehme man eine Linie so groß, als die Entfernung des Punctes M von der Visirlinie ist, so erhält man den Punct N, so daß

9. MN die gegebene Neigung hat, und in der gegebenen Stunde streichet.

1. Zusatz: Wenn das Klötzchen nicht genau eine söhlige Ebene hat (Nr. 1); so bewegt sich das Richtscheit, mithin auch die Schnur nicht in einer seigern Ebene auf- und abwärts, behält also nicht immer einerley Streichen, folglich ist's rathsam vor Nr. 7 nach Wegnahme des Gradbogens erst

noch-

nochmal durch den Hängcompaß zu untersuchen, ob die Schnur das Nr. 5 bemerkte Streichen noch beybehält, und im Gegentheile erst den Winkelweiser um D in die gehörige Lage zu drehen.

II. Zusatz: Da sich der Winkelweiser nicht um den gegebenen Punct M, sondern D drehet, so ists unmöglich dem Puncte M die Nr. 2 geforderte Lage mit aller Genauigkeit zu geben, daher ist's nothwendig zwischen dem gegebenen Puncte M, und dem gefundenen N eine Schnur zu spannen, und durch den Gradbogen sowohl, als durch den Hängcompaß die gefundene Linie nochmal zu prüfen.

III. Zusatz: Da der Winkelmesser nur bey Vermessungen am Tage gebraucht wird, so würde ich an dessen Stelle ein Astrolab wählen.

§. 122.

Aufgabe: (Fig. 42.)

Aus einem am Tage gegebenen Puncte M eine Linie MN abzustecken, welcher die Sohle MO, von welcher ihre Länge und Streichen gegeben ist, entspricht.

1. Auflösung:

1. Man stecke nach der Anweisung des vorhergehenden §. die Linie MR ab, welche in der gegebenen

denen Stunde streichet, sonst aber eine beliebige Neigung haben kann.

2. In dieser gefundenen Richtung messe man eine söhlige Länge MO, welche der gegebenen gleich ist.

3. Durch den Punct O schlage man einen senkrechten Pfahl NO, so ist MN die gesuchte Linie.

II. Auflösung:

4. Man verfahre wie Nr. 1, bemerke aber

5. durch den Gradbogen die Neigung RMO.

6. Nun berechne man $MN = \frac{MO \cdot r}{\cos. RMO}$.

7. Spanne in die Richtung MR eine Schnur, und nehme auf ihr diese gefundene Länge MN.

8. Setze bey N einen senkrechten Pflock, so ist die gesuchte Linie abgesteckt.

9. Läge der gegebene Punct M auf einer Anhöhe, so daß man MR' abwärts nehmen müßte, so bestimme man wieder die Neigung OMR', und

10. messe in ihrer Richtung $MN' = \frac{MO \cdot r}{\cos. OMR'}$,

schlage bey N' einen senkrechten Pflock, so ist die verlangte Linie abgesteckt.

Zusatz: Könnte man in der Richtung MR, welche das gegebene Streichen hat, wegen eintretenden Hindernissen als Bäumen, Hügeln und Gebüschen nicht unmittelbar messen, so fodert das Abstecken ein Verfahren, welches erst späther angegeben werden kann.

III. Hauptstück.

Vom Markscheiden.

§. 123.

Erklärung:

Das Markscheiden selbst besteht aus nachstehenden Verrichtungen:

a) Markscheiderzüge vorzunehmen und einzuschreiben;

b) solche zu berechnen, und

c) davon die erforderlichen Risse zu verfertigen, oder sie zuzulegen.

I. Abschnitt.

Von Verrichtung und Einschreibung der Markscheiderzüge.

§. 124.

Erklärungen:

a) Dasjenige vermittels Markscheider-Instrumente Messen, wodurch eine oder mehrere gegebene Linien **vollkommen**, das ist, der **Größe und Lage nach** bestimmt sind, heißt sie **Abziehen**;

b) diese gemessene Bestimmungen in eine Tabelle eintragen, heißt solche **einschreiben**.

c) Die durch das Abziehen bestimmte Linie heißt ein **Markscheiderwinkel**, und mehrere solche bestimmte Linien heissen ein **Markscheiderzug**.

Zusatz: Für jeden gegebenen Punct A (Fig. 20) nimmt man die Lage der söhligen Ebene MN sowohl, als der seigern Magnetebene AE, die beyde durch A gehen, als bekannt an, weil sich die Lage der erstern durch den Gradbogen, und die der letztern durch den Compaß allemal leicht angeben läßt.

§. 125.

§. 125.

Lehrsatz: (Fig. 20)

Wenn von der vonlägigen Linie AB, die Lage ihres Anfangspunctes A, ferner ihre Größe, Neigung, und Streichen bestimmt sind, so ist die Linie selbst vollkommen bestimmt.

Beweis:

1. Aus der Lage des Punctes A ist die Lage der söhligen Ebene MN, und seigern Magnetebene AE bestimmt (§. 124, Zusatz).

2. Durch das Streichen ist der söhlige Winkel CAF (§. 85, a), das ist, der Neigungswinkel der durch AB gelegten seigern Ebene mit der Magnetebene (§. 83, III. Zus.), also die Lage der durch AB gelegten seigern Ebene bestimmt.

3. Durch die Neigung endlich und Größe, ist in letzterer Ebene, die Linie AB der Größe und Lage nach, also vollkommen bestimmt.

I. Zusatz: Wenn von einer Linie die Lage ihres Anfangs- und Endpunctes bestimmt ist, so ist die Linie selbst vollkommen bestimmt (§. 6, Geom.); und umgekehrt.

II. Zusatz: Eine Linie abziehen und einschreiben, heißt also, ihre Größe, Neigung und Streichen messen (§. 124, a) und aufschreiben.

III. Zusatz: Da bey einer söhligen Linie ihre Neigung = o ist, so wird sie abgezogen und eingeschrieben, wenn man ihre Größe und ihr Streichen mißt, und in eine Tabelle einträgt.

IV. Zusatz: Wenn von mehrern aufeinander folgenden Linien die Lage vom Anfangspuncte der ersten Linie, und von jeder einzeln ihre Größe, Neigung und ihr Streichen gegeben sind, so sind sie vollkommen bestimmt.

V. Zusatz: Mehrere Linien Abziehen, oder einen Markscheiderzug verrichten und einschreiben, heißt also ihre Größe, Neigungen, Streichen messen, und in eine Tabelle eintragen.

§. 126.

Erklärungen:

a) Mehrere Linien unter der Erde Abziehen, heißt einen Grubenzug verrichten.

b) Mehrere Linien auf der Oberfläche der Erde Abziehen, heißt einen Tagzug verrichten.

§. 127.

Aufgabe:

Einen Grubenzug zu verrichten, und einzuschreiben.

I. Auflösung: Wenn man den Hängcompaß brauchen darf.

1. Man entferne sorgfältig alles Eisen, damit die Richtung der Magnetnadel nicht gestöhret werde.

2. Ist der Anfangspunct A der Vermessung (der Anhaltungspunct) am Mundloche eines seigern Schachtes, so bestimme man die Länge AB des Schachtes nach §. 94, und verzeichne sie in die treffende Spalte der Tabelle.

3. Am Endespuncte B befestige man das eine Ende der Schnur, das andere Ende derselben in einer Entfernung BC von höchst 10 Lachtern nach einer Richtung, die der zweyten abzuziehenden Linie parallel ist, und

4. gebe der Schnur die möglichste Spannung (§. 93).

5. Nun messe man mit dem Gradbogen ihre Neigung (§. 97) oder das Steigen und Fallen, und verzeichne es in die dazu bestimmte Rubrike der Tabelle.

6. Jetzt nehme man den Gradbogen weg, und messe mit dem Hängcompasse das Streichen (§. 107), und trage solches am bestimmten Orte der Tabelle ein.

7. Ferner messe man die Länge der gezogenen Schnur BC (§. 93), und bemerke sie in der passenden Spalte der Tabelle.

8. Endlich verzeichne man noch unter der Rubrike Anmerkungen, in die Tabelle die merkwürdigen Puncte und Gegenstände; als den ersten Anhaltungspunct, aufstoßende Gebäude, übersetzende Gänge u. s. w.;

9. Verfährt man bey allen folgenden Linien auf eben diese Art, so ist der Markscheider-Grubenzug vollendet und eingeschrieben.

10. Endlich müssen von Zeit zu Zeit vorzüglich in weitschichtigen Gruben Merkzeichen in's Gezimmer, oder besser ins Gestein (Stuffen) geschlagen werden, um die Vermessung anbinden, prüfen und wiederholen zu können, welches bey aller angewandten Sorgfalt doch nothwendig ist.

11. Auflösung: Wenn man statt des Hängcompasses die Eisenscheibe nehmen muß.

11. Es geschieht alles wie vorher, nur muß der Anhaltungspunct da genommen werden, wo man den Hängcompaß noch brauchen darf, um das Streichen der ersten Linie zu finden.

12. Bey den folgenden wird solches nach §. 113 gesucht.

13. Die Einschreibtabelle behält die nemlichen Rubriken wie in der vorhergehenden Auflösung.

§. 128.

Aufgabe:

Einen Tagzug zu verrichten und einzuschreiben.

Auflösung:

Man verfahre ganz nach der Anleitung der Isten oder IIten Auflösung des vorhergehenden §, je nachdem man den Hängcompaß oder die Eisenscheibe brauchen darf, oder man löse die Aufgabe vermittels geometrischer Instrumente nach den Vorschriften der practischen Geometrie auf; in jedem Falle wird eine windstille Witterung, des am Gradbogen angebrachten Senkels wegen, erfordert.

§. 129.

§. 129.

Formular einer Einschreibtabelle oder Zugbuches für Vermessungen mit dem Compaß, oder mit der Eisenscheibe.

Nro. der Schnur.	Gradbogen.				Compaß.		Donlage.				Stuffen.	Anmerkungen.
	Steigen.		Fallen.									
	Gr.	Min.	Gr.	Min.	St.	$\frac{1}{15}$ St.	Lachtr	Zehentl.	Zoll.	Prim.		
1	—	—	90	—	—	—	—	—	—	—	a	a) Am Mundbaume des Schachtes angehalten, und 10 Lachter abgeseigert.
2	15	10	—	—	5	2	5	1	—	—		
3	15	30	—	—	10	2	9	4	4	2	b	b) Am Ende der Schnur auf einen alten Bau getroffen.
4	16	15	—	—	15	4,1	4	6	6	5		
5	—	—	5	45	21	0,8	9	5	1	8		
6	—	—	6	20	0	7,5	6	—	2	9	c	c) Hier steht ganz Ort an.

Zusatz: Da eine Stunde 15°, mithin $\frac{1}{15}$ St. genau einen Grad hält, so könnte man leicht das Streichen am Hängcompaß in Graden angeben, und in die Tabelle eintragen.

§. 130.

Aufgabe:

Aus dem Winkel ACB, welchen zwey söhlige Linien AC, CB einschließen, das Streichen der Linie CB zu finden, wenn das Streichen von AC bekannt ist.

Auflösung:

1. Man ziehe die beliebige gerade Linie PQ (Fig. 43 und 44) als Richtung der Magnetlinie, wovon AP den nördlichen Theil vorstellt.

2. Durch A verzeichne man AC unter dem gegebenen Streichen mit dem Zuleginstrument (§. 110) oder nach §. 356, Trigon.

3. An C trage man den gegebenen Winkel ACB auf, und durch C ziehe man pq ∥ PQ, so ist

4. pq die Richtung der Magnetnadel, und BCp giebt das Streichen von BC, welches man wieder durch das Zuleginstrument, oder aus §. 355. Trigon. findet.

5. Will man das Streichen von BC, das ist, den Winkel BCp unmittelbar aus dem gegebenen berechnen, so sieht man aus Nr. 1 — 3 allemal, ob CB östlich oder westlich streichet, folglich ob BCp ein hohler (Fig. 43), oder ein erhabener Winkel ist (Fig. 44) (§. 85, Zus.)

6. Streicht nun, wie in beyden Figuren angenommen ist, AC östlich, so ist PAC hohl, mithin im ersten Falle (Fig. 43) für den hohlen Winkel ACB wird

$$BCp = BCa + aCp$$
$$= 180° - ACB + PAC.$$

7. Für den 2ten Fall (Fig. 44), wenn nemlich AC östlich, aber CB westlich streicht, also PAC hohl, hingegen pCB erhaben ist, wird für den hohlen Winkel ACB

$$BCp = 180° + ACq + ACB.$$
$$= 180° + PAC + ACB.$$

8. Streicht hingegen AC westlich, so läßt sich leicht in beyden Fällen auf die nemliche Art BCp berechnen.

I. Zusatz: Für $PAC = 4\frac{3}{15}$ St. $= 63°$ (Fig. 43), und $ACB = 170°$ wird $BCp = 180° - 170° + 63° = 73° = 4\frac{13}{15}$ St.

II. Zusatz: Sind von mehrern auf einander folgenden söhligen Linien alle Winkel und das Streichen der ersten gegeben, so läßt sich daraus das Streichen der übrigen finden.

III. Zusatz: Wenn umgekehrt das Streichen der beyden söhligen Linien AC, CB gegeben ist, so läßt sich daraus der Winkel ACB finden. Denn man ziehe wieder AC, und durch A und C die Magnetlinie PQ, pq, und trage CB ebenfalls unter dem gegebenen Streichen auf, so läßt sich aus der Construction unmittelbar beurtheilen, ob der hohle Winkel ACB spitzig oder stumpf ist. Streichen nun beyde Linien östlich, wie Fig. 43, so sind beyde Winkel PAC, BCp hohl, mithin der hohle Winkel ACB = ACq + BCq = PAC + 180° — BCp. Streicht endlich AC östlich, CB westlich (Fig. 44), so ist der PAC hohl, und BCp erhaben, mithin der hohle Winkel ACB = BCp — 180° — aCp = BCp — 180° — PAC. Eben so läßt sich in beyden Fällen der hohle Winkel ACB bestimmen, wenn AC westlich streicht, mithin PAC erhaben ist. Aus §. 2 muß man endlich beurtheilen, ob der gefundene hohle auf der einen, oder aber der erhabene Winkel auf der andern der wahre gesuchte ist.

IV. Zusatz: Ist von einer gebrochenen söhligen Linie das Streichen jeder einzelnen gegeben, so lassen sich daraus die Winkel finden, welche sie einschließen.

§. 131.

Aufgabe: (Fig. 40 und 41).

Aus der Größe, Neigung und dem eingeschlossenen Winkel zweyer Donlagen AC, CB, das Streichen der letztern zu finden, wenn jenes der erstern gegeben ist.

Auflösung:

1. Man suche aus §. 116 oder §. 118 den Winkel ihrer Sohlen, und nun
2. nach dem vorhergehenden §. das Streichen der Linie CB.

I. Zusatz: Wenn von den Donlagen AC, CB ihre Größe, Neigung, der eingeschlossene Winkel, uud das Streichen von AC gegeben ist, so ist auch das Streichen der andern Linie CB bekannt, mithin sind beyde Linien vollkommen bestimmt (§. 125. IV. Zusatz).

II. Zusatz: Wenn von mehrern aufeinander folgenden Linien das Streichen der ersten, ferner die Neigung und Größe einer jeden Linie, nebst allen zwischen ihnen liegenden Winkeln gemessen und aufgezeichnet werden, so ist der Zug verrichtet und eingeschrieben.

§. 132.

Aufgabe:

Einen Zug ohne Eisenscheibe und Compaß zu verrichten und einzuschreiben.

Auflö-

Auflösung:

1. Man fange die Vermessung von einem Puncte an, wo man den Hängcompaß noch brauchen darf, und bestimme die Länge, Neigung und das Streichen dieser ersten Linie aus §. 127, I. Aufl.

2. Bey allen folgenden Linien messe man wieder ihre Größe und Neigung nach eben dieser Anleitung,

3. die eingeschlossenen Winkel aber durch Schnüre nach §. 114.

4. Endlich zeichne man in die treffenden Spalten des Zugbuches alle gemessenen Stücke, und setze

5. bey hohlen Winkeln dem gemessenen Abstande ihrer Schenkel das Zeichen + und bey erhabenen das Zeichen — vor, so ist

6. der Zug vollendet (§. 131, II. Aufl.) und eingeschrieben.

§. 133.

Formular eines Zugbuches für Vermessungen ohne Compaß und Eisenscheibe.

Nro. der Schnur	Gradbogen.				Bestimmung des Winkels.						Donlage.			Stuffen.	Anmerkungen.
	Steigen		Fallen.		Länge der Schenkel			Dritte Seite.							
	°	Min	°	Min	Lacht.	Zehentl.	Zoll.	Lacht.	Zehentl.	Zoll.	Lacht.	Zehentl.	Zoll.		
1	3	24′	—	—	—	—	—	—	—	—	9	7	4	a	a) Das Streichen beträgt 4 St. $\frac{3}{15}$.
2	—	25′	—	—	1	—	—	+ 1	4	5	7	4	5		
3	—	—	—	15′	1	—	—	— 0	9	8	10	—	—		
4	—	—	1	24	0	9	5	— 0	4	5	8	6	5		

II. Abschnitt.

Von Berechnung eines Zuges.

§. 134.

Lehrsatz: (Fig. 20)

Wenn man durch den gegebenen Anfangspunct A der Donlage AB die söhlige Ebene MN, und die seigere Magnetebene AE legt, vom Endespuncte B auf erstere Ebene den Perpendikel BC, und aus C auf die zweyte oder Magnetebene den Perpendikel CG zieht, so ist durch BC, AG, CG die Lage des Punctes B, oder, was einerley ist, die Donlage AB vollkommen bestimmt.

Beweis:

1. Die seigere Ebene durch AB schneide die söhlige MN in AC, und die Magnetebene schneide eben diese söhlige Ebene in AF, so liegt

2. BC in der seigern Ebene durch AB, und steht auf auf der söhligen Durchschnittslinie AC senkrecht (§. 170, II. Zus. Geom.)

3. Eben so liegt CG in der söhligen Ebene MN, und steht auf der Durchschnittslinie AF senkrecht.

4. Im söhligen Dreyecke AGC ist durch den rechten Winkel G, und den beyden Catheten AG, CG die Hypothenuse AC, und der Winkel CAG

(§. 323, Trig.) das ist, das Streichen und die Sohle von AB bestimmt.

5. Aus AC und BC aber ist wieder die Grösse und Neigung von AB, folglich

6. aus AG, CG, BC die Donlage AB vollkommen bestimmt (§. 125).

I. Zusatz: In Rücksicht des Anfangspunctes A, so wie AC die Sohle, BC die Seigerteufe, vom Puncte B oder Linie AB heißt, so kann man den vom Endespuncte der Sohle auf die Magnetlinie AF gezogenen Perpendikel CG die Breite, und den zwischen A und G enthaltenen Theil AG der Magnetlinie die Länge für den Punct B oder Donlage AB heissen.

II. Zusatz: Durch die Länge AG und Breite CG ist die Grösse und das Streichen der Sohle AC gegeben.

III. Zusatz: Für einen gegebenen Punct A ist die Lage eines andern Punctes B durch dessen Länge, Breite und Seigerteufe vollkommen bestimmt.

Aumerkung: Da sich CG : AG = sin. CAG : cos. CAG, mithin wie der Sinus des Streichungswinkels zu seinem Cosinus verhält, so gab Herr Lempe der Linie CG den Namen des Streichungssinus,

sinus, und der Linie AG jenen des Streichungs-cosinus; es ist aber nicht gewöhnlich, Seiten eines Dreyeckes, deren wahre Größe man sucht, trigonometrisch zu bezeichnen, ich behielt daher die vom Herrn Scheidauer gewählte Benennung der Länge und Breite.

§. 135.

Erklärung:

Aus der gegebenen Größe, Neigung und Streichen einer Linie, ihre Seigerteufe, Sohle, Länge und Breite berechnen, heißt einen Markscheiderwinkel berechnen, und wenn dieses von mehrern Linien, oder einem ganzen Zuge geschieht, einen Zug berechnen.

§. 136.

Aufgabe: (Fig. 20)

Aus der Größe, Neigung einer Donlage AB, ihre Seigerteufe BC und Sohle AC berechnen.

Auflösung:

$$1.\ BC = \frac{AB \cdot \text{sin. } BAC}{r}$$

$$2.\ AC = \frac{AB \cdot \text{cos. } BAC}{r}$$

1. Zusatz für AB = 9 Lachter 7 Zehentl = 9700 Prismen und BAC = 18°15′ ist

BC = 3037,7 = 3038 Pr. = 3 Lachter 3 Zoll 8 Primen.

AC = 9212 Primen = 9 Lachter 2 Zehentl 1 Zoll 2 Primen.

II. Zusatz: Um diese Berechnungen nicht in jedem einzelnen Falle vornehmen zu müssen, hat man eigene Tabellen berechnet.

III. Zusatz: Eben so ist durch die Sohle und Seigerteufe die Größe und Neigung der Donlage gegeben, denn $AB = \sqrt{(AC^2 + BC^2)}$ und $\text{tang. } A = \frac{BC \cdot r}{AC}$.

§. 137.

Aufgabe:

Tabellen für die Seigerteufen und Sohlen zu berechnen.

Auflösung:

1. Da die Donlage nie größer als 10 Lachter genommen wird, so setze man sie = 10000 Primen, schlage in den gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln für alle Winkel den Sinus und Cosinus auf, bestimme ihre Größe dem angenommenen Radius = 10000 gemäß, so geben

2. die Sinus die Seigerteufen, und die Cosinus die Sohlen für jede Neigung in Primen.

3. Nun setze man nach und nach die Donlage 9, dann 8, 7, - - - 1 Lachter, und berechne aus §. 136 für jede Neigung die entsprechenden Seigerteufen und Sohlen, so ist die Tabelle fertig.

I. Zusatz: Gewöhnlich nimmt man die Neigung von 5 zu 5 Minuten, weil man selten eine größere Schärfe in Bestimmung der Neigung mit dem Gradbogen erlangen kann.

II. Zusatz: Wenn man (Fig. 45) durch b zu AC und BC die Parallelen be, bc zieht, so ist

$\triangle$ bBe $\sim$ $\triangle$ BAC, mithin

Be : BC = bB : AB

be : AC = bB : AB.

Hält also die Donlage AB ein Lachter, und bB ein Zehentl, so ist

Be : BC = 1 : 10

be : AC = 1 : 10, folglich

braucht man für die Donlagen, welche weniger als ein Lachter halten, keine eigene Tafeln, man darf nur das letzte niedrigste Ziffer als eine Decimal abschneiden, wenn die Donlage Zehentl enthält.

III. Zusatz: Für die Donlagen, welche nur Zolle halten, muß man die zwey, und wenn sie nur Primen hat, die letzten drey niedrigsten Ziffern als Decimalen abschneiden.

Anmerkung: Die am Ende angehängten Tafeln sind vom Hn. v. Voith, Oberverweser zu Bodenwehr,

berechnet worden. — Für die Abtheilung des Lachters in Achtl findet man in allen Lehrbüchern über die Markscheidekunst die nöthigen Tafeln.

§. 138.

Aufgabe: (Fig. 45)

Für die Donlage AB = 9 Lachter 7 Zehentl, und Neigung BAC = 18°15′, aus den Tabellen die Seigerteufe BC und Sohle AC zu suchen.

Auflösung:

1. Man schlage in den Tabellen die gegebene Neigung auf, und nehme

2. aus der Spalte für 9 Lachter die Seigerteufe = 2819, und eben so

3. Aus der Spalte für 7 Lachter, schneide aber die letzte Ziffer als Decimal ab, das ist, nehme 219.

4. Die Summe dieser beyden Zahlen giebt die verlangte Seigerteufe in Primen, oder

BC = 2819 + 219 = 3038 Primen.

5. Auf eben diese Art bestimme man die Sohle, oder

AC = 8547 + 665 = 9212 Primen.

Beweis:

6. Man setze Ab = 9 Lachter, und bB = 7 Zehentl,

7. bc = 2819 Pr. und
   Be = 219 Prim. (§. 137, II. Zus.), folglich

8. BC = Be + eC = Be + bc = 2819 + 219
   (Nr. 4).

9. Eben so ist Ac = 8547 Pr. uod
   be = 665 Pr., also

10. AC = Ac + cC = AC + be = 8547 + 665
    (Nr. 5).

Zusatz: Für AB = 9 Lachtr 7 Zehentl 5 Zoll 4 Prim.
und BAC = 18°15′ ist
die Seigerteufe BC = 2819 + 219 + 16 + 1
= 3055 Prim.
= 3 Lachter 5 Zoll 5 Prim.
die Sohle AC = 8547 + 665 + 47 + 4
= 9263 Pr. = 9 Lachtr. 2 Zehentl
6 Zoll 3 Prim.

§. 139.

Aufgabe: (Fig. 20)

Aus der Größe, Neigung und Streichen der Donlage AB, die Länge AG, und Breite CG für den Punct B suchen.

Auflösung:

1. Man suche aus der gegebenen Länge und Neigung der Donlage AB aus §. 136 oder 138 ihre Sohle AC.

2. Aus der Sohle AC, und dem gegebenen Streichen, oder Winkel CAF läßt sich entweder die Breite CG und Länge AG berechnen, es ist nemlich

$$CG = \frac{AC \,.\, \text{sin. } CAF}{r};$$

$$AG = \frac{AC \,.\, \text{cos. } CAF}{r}; \text{ oder}$$

3. Man kann die Länge sowohl als Breite ohne Rechnung aus den Tabellen §. 138 bestimmen, wenn an die Stelle der Donlage die gefundene Sohle AC, und an die Stellen der Seigerteufe und Sohle, die Breite und Länge setzet.

I. Zusatz: Streichet die gegebene Donlage AB in den ersten 12 Stunden, das ist, zwischen Se. und Or. oder zwischen Or. und Me., so ist CAF $< 180°$, mithin sin. CAF positiv (§. 292, IX. Zus. Trig.), folglich auch die Breite CG (Nr. 2) positiv, d. i., CG fällt auf die östliche Seite der Magnetlinie.

II. Zusatz: Streichet die gegebene Donlage AB in den letzten 12 Stunden, von 12 bis 24, das ist zwischen Me. und Occ., oder zwischen Occ. und Se., so ist CAF $> 180°$, also sin. CAF, mithin auch CG negativ, folglich fällt die Breite CG auf die westliche Seite der Magnetlinie.

III. Zusatz: Streichet die Donlage in den ersten oder letzten 6 Stunden, das ist, zwischen Se. und Or.,

oder zwischen Occ- und Se., so ist im ersten Falle CAF $<$ 90°, und im zweyten CAF $>$ 270°, also allemal cos. CAF positiv (§. 296, IV. Zus. Trig.), folglich auch die Länge AG (Nr. 2) positiv, das ist, die Länge liegt von A aus nach der Nordseite der Magnetlinie zu.

IV. Zusatz: Streichet die gegebene Donlage AB in den mittlern 12 Stunden, das ist zwischen Or. und Me.; oder zwischen Me. und Occ., so ist CAF $>$ 90° aber doch $<$ 270°, mithin cos. CAF, und daher auch AG negativ, das ist, die Länge AG fällt von A aus gegen die südliche Seite der Magnetlinie zu.

§. 140.

Aufgabe:

Den §. 129 eingeschriebenen Zug zu berechnen, und in das Zugbuch einzutragen.

Auflösung:

1. Man setze in obige Tabelle nach der Donlage eine neue Spalte in zwey Abtheilungen für die steigende und fallende Seigerteufen, und bestimme solche aus §. 136 oder 138.

2. Eben so berechne man die Sohlen, und bestimme für sie wieder eine Spalte.

3. Endlich füge man noch zwey Columnen bey, für die erstere berechne man aus §. 139 die einzelnen Längen, und trage die positiven oder nördlichen in die erste, hingegen die negativen oder südlichen Längen in die zweyte Abtheilung dieser Columne.

4. Eben so kommen in den beyden Abtheilungen der zweyten Colnmne die berechneten positiven, d. i. östlichen, und die negativen oder westlichen Breiten zu stehen.

5. Die am Ende beygefügte III. Tabelle enthält die gefundenen Resultate.

§. 141.

Aufgabe:

Den §. 133 eingeschriebenen Zug zu berechnen, und in das Zugbuch einzutragen.

Auflösung:

1. Man berechne wieder die Seigerteufen und Sohlen, trage sie nach der Donlage in eigene Spalten wie im vorhergehenden §. ein.

2. Nun berechne man nach der Anleitung des 116. oder 118. §. die Winkel, welche die Sohlen einschliessen, und verzeichne sie in einer eigenen Columne.

3. Endlich könnte man aus letztern gefundenen Winkeln das Streichen (§. 130), folglich auch die einzel-

einzelnen Längen und Breiten suchen, und wie im vorhergehenden §. eintragen, allein dieses würde sehr mühsam, und wie sich in der Folge zeigen wird, ohne Nutzen seyn.

4. Die am Ende angehängte IV. Tabelle enthält die hieher gehörigen Resultate.

§. 142.

Aufgabe:

Aus den Angaben der IV. Tabelle die Winkel der Sohlen (§. 141, Nr. 2) zu berechnen.

Auflösung:

1. Durch das Streichen von Nr. 1, oder der ersten Linie ist der erste Winkel A gegeben, welchen die Sohle der ersten Linie mit dem nördlichen Theil der Magnetlinie macht, nemlich $A = 4\frac{3}{15}$ St. $= 63°$.

2. Um nun den Winkel B zu finden, welchen die Sohlen der beyden ersten Linien einschliessen, so setze man (§. 118)

3. $\alpha = 25'$; $\beta = 3°24'$; $d = 8°18'$.

4. Da nun die erste Linie in Rücksicht ihres Anfangspunctes A steiget, so fällt sie in Rücksicht ihres Endpunctes, mithin ist (§. 118, III. Zus.)

5. $(\text{sin.}\ \frac{1}{2}\ B)^2$

$$= \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,(d + (\beta + \alpha))\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}\,(d - (\beta + \alpha))}{\cos.\ \alpha\ \cos.\ \beta}\ r^2$$

6. Ferner ist $d + \beta + \alpha = 12°7'$, also
$\frac{1}{2}\,(d + (\beta + \alpha)) = 6°3'30''$

7. $d - (\beta + \alpha) = 4°29'$, mithin
$\frac{1}{2}\,(d - (\beta + \alpha)) = 2°14'30''$, also

8. log. sin. $6°3'30'' = 9{,}0234205$
log. sin. $2°14'30'' = 8{,}5923376$
log. $r^2 = 20{,}0000000$
compl. dec. log. cos. $25' = 0{,}0000115 - 10$
compl. dec. log. cos. $3°24' = 0{,}0007651 - 10$

log. $(\text{sin.}\ \frac{1}{2}\ B) = 17{,}6165347$
log. sin. $\frac{1}{2}\ B^2 = 8{,}8082673$.

9. Folglich $\frac{1}{2}\ B = 3°41'13''$, mithin
$B = 7°22'26''$.

10. Für den dritten Winkel wird
$\beta = 25'$, und $\alpha = 15'$; $d = 5°37'$.

11. Da ferner beyde Linien in Rücksicht des dritten Punctes C fallen, so ist §. 118
$(\text{sin.}\ \frac{1}{2}\ C)^2$

$$= \frac{\text{sin.}\ \frac{1}{2}\,(d + (\beta - \alpha))\ \text{sin.}\ \frac{1}{2}\,(d - (\beta - \alpha))}{\cos.\ \alpha\ \cos.\ \beta}\ r^2$$

12. Ferner ist $d + (\beta - \alpha) = 5^\circ + 47'$,
also $\frac{1}{2}(d + (\beta - \alpha)) = 2^\circ 53' 30''$

13. $d - (\beta - \alpha) = 5^\circ 27'$,
also $\frac{1}{2}(d - (\beta - \alpha)) = 2^\circ 43' 30''$

14. log. sin. $2^\circ 53' 30'' = 8{,}7028412$
log. sin. $2^\circ 43' 30'' = 8{,}6770801$
log. $r^2 = 20{,}0000000$
compl. dec. log. cos. $15' = 0{,}0000041 - 10$
compl. dec. log. cos $25' = 0{,}0000115 - 10$

---

log. $(\text{sin. } \frac{1}{2} C)^2 = 17{,}3799369$
log. sin. $\frac{1}{2} C = 8{,}6899684$

15. mithin $\frac{1}{2} C = 2^\circ 48' 25''$, also $C = 5^\circ 36' 50''$.

16. Da aber vermög der Tabelle die dritte Seite 196 Pr. negativ ist, so ist der Winkel C erhaben, mithin $C = 354^\circ 23' 10''$.

17. Für den folgenden Winkel D ist wieder
$\alpha = 15$; $\beta = 1^\circ 24'$, und $d = 2^\circ 34' 42''$.

18. Da wieder die vorgehende Schnur steiget, und die folgende fällt, so ist
$(\text{sin. } \frac{1}{2} D)^2$
$$= \frac{\text{sin. } \frac{1}{2}(d + (\beta + \alpha)) \text{ sin. } \frac{1}{2}(d - (\beta + \alpha))}{\cos. \alpha \cos. \beta} r^2$$

19. Ferner $d + \beta + \alpha = 4^\circ 13' 42''$
also $\frac{1}{2}(d + (\beta + \alpha)) = 2^\circ 6' 51''$

20. $d - (\beta + \alpha) = 0°55'42''$

also $\frac{1}{2}(d - (\beta + \alpha)) = 0°27'51''$

21. log. sin. $2°6'51'' = 8{,}5669180$

log. sin. $0°27'51'' = 7{,}9085459$

log. $r^2 = 20{,}0000000$

compl. dec. cos. $0°15' = 0{,}0000041 - 10$

compl. dec. cos. $0°24' = 0{,}0001297 - 10$

---

log. $(\sin. \frac{1}{2} D)^2 = 16{,}4755977$

log. sin. $\frac{1}{2} D = 8{,}2377988$

22. Also $\frac{1}{2} D = 0°59'28''$, also $D = 1°58'56''$, da aber der Winkel erhaben ist, so wird $D = 358°1'4''$.

§. 143.

Erklärungen: (Fig. 46)

Wenn man durch den Punct A mehrerer aufeinander folgender Donlagen AB, BC u. s. f. eine söhlige Ebene legt, und auf sie von den Puncten B, C u. s. f. die Perpendikel Bb, Cc u. s. f. zieht, so heissen

a) die Puncte b, c die **söhligen Projectionspuncte** von B, C, so wie die söhligen Linien Ab, bc die **söhligen Projectionen** der Donlagen AB; BC;

b)

b) die Perpendikel Bb, Cc, das ist, die Höhen oder Teufen der Puncte B, C über oder unter der Ebene von A, heissen die ganzen Seigerteufen.

c) Die gebrochene söhlige Linie Abc heißt endlich die Projection der gebrochenen Linie ABC (§. 180, Geometrie).

I. Zusatz: Wenn die beyden Donlagen AB, BC steigen, so ist die Höhe des Punctes C über A, oder die ganze Seigerteufe von C der Summe der beyden Seigerteufen dieser Donlagen gleich; denn man lege durch B ebenfalls eine söhlige Ebene, welche Cc in D schneide, so sind Bb, CD die Seigerteufen von AB und BC: nun ist aber $Cc = CD + Dc = CD + Bb$.

II. Zusatz: Eben so ist die ganze Seigerteufe von C der Summe der einzelnen Seigerteufen gleich, wenn beyde Donlagen fallen.

III. Zusatz: Wenn von den beyden Donlagen die eine steiget, und die andere fällt, so erhält man die ganze Seigerteufe von C, wenn man die kleinere von der größern abzieht.

IV. Zusatz: Nimmt man also die Seigerteufen steigender Donlagen als positive, und jene der fallenden Donlagen für negative Größen, so erhält man die ganze Seigerteufe, oder Höhe und Tiefe

von

von C über oder unter A, wenn man alle Seigerteufen der von A bis C liegenden Puncte addirt.

V. Zusatz: bc, oder die söhlige Projection von BC hat mit ihrer Sohle BD gleiches Streichen, und einerley Größe, daher hat c mit C gleiche Länge und Breite (§. 134, I. Zusatz). Denn bc ∥ BD (§. 172, II. Geom.), mithin hat bc und BD gleiches Streichen (§. 86); ferner ist noch Bb ∥ Cc (§. 165, Nr. I. Geom.), also bc = BD; endlich ist durch die Größe und das Streichen die Länge und Breite vollkommen bestimmt (§. 139).

VI. Zusatz: Die söhlige Projection Abc der gebrochenen Linie ABC ist vollkommen bestimmt, wenn von letzterer der Ordnung nach ihre Sohlen nebst ihrem Streichen gegeben sind.

VII. Zusatz: Zieht man zwischen den zwey Puncten A, C die gerade Linie oder Donlage AC, so ist Ac ihre söhlige Projection: sind nun von den vier Stücken, nemlich Größe und Neigung, ganze Seigerteufe und söhlige Projection, das ist, von AC, CAc, Cc, Ac zwey gegeben, so lassen sich die beyden andern berechnen (§. 325, Trigon).

Anmerkung: Die Zusätze I. — IV. enthalten die Ursache, warum ich den Perpendikeln oder Höhen Bb, Cc lieber die Benennung ganze Seigerteufen gab.

§. 144.

Erklärungen: (Fig. 47).

Stellet Abc die söhlige Projection der Dönlagen AB, BC (Fig. 46) vor, und man nimmt die durch A gehende Magnetlinie AP zur Abscissen = oder Längenlinie, so heissen

a) die entsprechenden Abscissen Aβ, Aγ die ganzen Längen, so wie

b) ihre Ordinaten bβ, cγ die ganzen Breiten der Puncte b, c, oder vielmehr der Puncte B, C, deren Projectionen sie sind.

I. Zusatz: Die ganzen Längen, welche auf die nördliche Seite der Magnetlinie fallen, sind positiv, und jene auf der südlichen Seite von A negativ.

II. Zusatz: Eben so sind die ganzen Breiten auf der östlichen Seite der Magnetlinie positiv, auf der westlichen Seite hingegen negativ.

III. Zusatz: Die ganze Länge Aγ für den Punct c oder vielmehr C ist der Summe der einzelnen positiven oder negativen Längen aller von A bis C liegenden Puncte gleich. Denn man ziehe durch b zu AP die Parallele bp, und auf sie aus c den Perpendikel en, so ist bp die Richtung der Magnetnadel (§. 84, b), und bn die dem Puncte C entsprechende Länge, so wie Aβ jene von B:

mithin

mithin ist $A\gamma = A\beta + \beta\gamma = A\beta + bn$. Ist von den einzelnen Längen die eine positiv, die andere negativ, so muß man die kleinere von der größern abziehen, das ist, die entgegen gesetzten Größen addiren.

IV. Zusatz: Eben so ist die ganze Breite des Punctes C der algebraischen Summe der einzelnen Breiten aller Puncte von A bis C gleich. Denn $c\gamma = n\gamma - nc = b\beta - nc = b\beta + (-nc)$, weil nc in der Figur negativ ist.

V. Zusatz: Durch die ganzen Längen und Breiten aller Puncte ist die söhlige Projection aller Donlagen vollkommen bestimmt.

VI. Zusatz: Für einen gegebenen Punct A ist die Lage eines jeden andern Punctes C durch seine ganze Länge, ganze Breite und ganze Seigerteufe vollkommen bestimmt. Denn durch beyde erstere ist der Projectionspuuct c, und durch letztere cC, (Fig. 46) folglich auch C vollkommen bestimmt.

VII. Zusatz: Sind also von mehrern Donlagen für einen gegebenen Punct A die ganzen Längen, ganzen Breiten, und ganzen Seigerteufen aller übrigen Puncte gegeben, so ist die ganze gebrochene Linie vollkommen gegeben.

§. 145.

Aufgabe:

Aus dem §. 129 eingeschriebenen, und §. 140 berechneten Zugbuche die jedem Puncte entsprechende ganze Seigerteufe, oder Höhe und Tiefe über eine söhlige Ebene anzugeben, die durch den Anfangspunct der Schnur Nr. 1 oder a gelegt wird.

Auflösung:

1. Wenn Nr. 1 den Endespunct der ersten, Nr. 2 jenen der zweyten, Nr. 3 jenen der dritten Schnur bezeichnet, so ist

2. Die ganze Seigerteufe für Nr. 1 = — 10000 Pr. das ist, der Endespunct der ersten Schnur liegt 10 Lachter tief unter der Ebene durch a.

3. Ganze Seigert. für Nr. 2 = — 10000 + 1334 = — 8666 Prim., mithin die Tiefe beträgt 8 Lachter 6 Zehentl 6 Zoll 6 Prim.

4. Ganze Seigert. für Nr. 3 = — 10000 + 1334 + 2523 = — 6143 Prim.

5. Für Nr. 4 = — 10000 + 1334 + 2523 + 1305 = — 4838 Prim.

6. Für Nr. 5 = — 10000 + 1334 + 2523 + 1305 — 954 = — 5792 Prim.

7. Für Nr. 6 = — 10000 + 1334 + 2523 + 1305
— 954 — 665 = — 6457 Prim.

§. 146.

Aufgabe:

Aus eben dem angeführten Zugbuche die jedem Puncte entsprechende ganze Länge und Breite anzugeben, wenn man die durch a gezogene Magnetlinie zur Längenlinie, und a für ihren Anfangspunct nimmt.

Auflösung:

1. Für den Endespunct der ersten Linie, oder Nr. 1 ist sowohl die Länge als Breite = 0, weil die Linie selbst seiger ist.

2. Für Nr. 2 ist die Länge + 1107 Primen, das ist, von a aus erstreckt sie sich auf der Nordseite der Magnetlinie, und hält 1 Lachter 1 Zehentl 7 Prim.; die Breite = + 4796 steht auf ihr senkrecht, und zwar auf der östlichen Seite der Magnetlinie, und hält 4 Lachtr 7 Zehentl 9 Zoll 6 Primen.

3. Für Nr. 3 Länge = + 1107 — 8033
= — 6926 Prim., das ist, für Nr. 3 fällt ihre Länge auf die südliche Seite der Magnetlinie von a aus, und hält 6 Lachtr 9 Zehentl 2 Zoll 6 Prim.

Die Breite = + 4796 + 4272 = + 9068,
also wieder östlich von 9 Lachter 16 Zoll
8. Prim.

4. Für Nr. 4 Länge = + 1107 — 8033 — 2932
= — 9858 Prim. u. südlich.
Breite = + 4796 + 4272 — 3384
= + 5684 Prim. östlich.

5. Für Nr. 5 Länge = + 1107 — 8033 — 2932
+ 6793
= — 3065 Prim. südlich
Breite = + 4796 + 4272 — 3384
— 6598
= — 914 Primen westlich,
folglich fällt sie auf die entgegenstehende, das ist, auf die Westseite der Magnetlinie.

6. Für Nr. 6 Länge = + 1107 — 8033 — 2932
+ 6793 + 5940
= + 2875 Prim., und wieder nördlich:
Breite = + 4796 + 4272 — 3384
— 6598 + 783
= — 131 Prim. westlich.

§. 147.

Aufgabe:

Aus dem §. 133 eingeschriebenen, und §. 141 berechneten Zugbuche die jedem Puncte entsprechende ganze Länge und Breite anzugeben, wenn man die

durch den Anfangspunct der ersten Linie gezogene Magnetlinie zur Längenlinie, und diesen Punct zum Anfangspunct nimmt.

Auflösung:

1. Wenn man aus den gefundenen Winkeln der Sohlen ihr Streichen, und daraus ihre einzelne Längen und Breiten berechnet (§. 141, Nr. 3), so findet man wie im vorhergehenden §. die entsprechende ganze Länge und Breite eines jeden Punctes.

2. Will man aber unmittelbar aus den Sohlen und ihren eingeschlossenen Winkeln die entsprechenden Längen und Breiten berechnen, so läßt sich dieses aus §. 5 bewerkstelligen.

3. Man bezeichne nemlich die Winkel der Sohlen der Ordnung nach mit den größern Buchstaben, nemlich $A = 63°$; $B = 7°22'$; $C = 354°23'$, $D = 358°1'$; der Kürze wegen sind die Secunden weggelassen worden.

4. Eben so bezeichne man die anliegenden Sohlen mit den kleinern Buchstaben, das ist $a = 9723$, $b = 7449$, $c = 9999$, $d = 8648$, so ist

5. für den Endespunct der ersten Linie oder für Nr. 1
die Länge $= a \cos. A$
die Breite $= a \sin. A$

6. Nun ist log. a = 3,9878003
log. cos. A = 9,6570468 — 10

mithin l. a cos. A = 3,6448471
= log. 4414, mithin

7. die Länge für Nr. 1 = + 4414, also nördlich.

8. Eben so ist log. a = 3,9878003
log. sin. A = 9,9498809 — 10

also log. a sin. A = 3,9376812
= log. 8663, folglich

9. die Breite für Nr. 1 = + 8663, oder östlich.

10. Für Nr. 2 ist die Länge
= a cos. A — b cos. (A + B)
die Breite = a sin. A — b sin. (A + B)

11. Nun ist A + B = 70°22′
Ferner log. b = 3,8720980
log. cos. (A + B) = 9,5263387 — 10

mithin log. b cos. (A+B) = 3,3984367 = log. 2503

12. Folglich die Länge für Nr. 2
= + 4414 — 2503
= + 1911, also nördlich.

13. Eben so ist log. b = 3,8720980
log. sin. (A+B) = 9,9739873 — 10

also log. b sin. (A+B) = 3,8460853 = log. 7016,
folglich

14. die Breite für Nr. 2 = + 8663 — 7016
= + 1647, also wieder
östlich.

15. Für Nr. 3 wird
die Länge = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A+B+C)
die Breite = a sin. A — b sin. (A + B)
+ c sin. (A+B+C)

16. Nun ist A + B + C = 424°45′, mithin
cos. (A+B+C) = cos. 64°45′, und eben so
sin. (A+B+C) = sin. 64°45′.

17. Ferner log. c = 3,9999566
log. cos. (A+B+C) = 9,6299890 — 10, mithin

log. c cos. (A+B+C) = 3,6299456 = log. 4265.
also

18. die Länge für Nr. 3 = 4414 — 2503 + 4265
= + 6176, also nördlich.

19. Eben so log. c = 3,9999566
log. sin. (A+B+C) = 9,9563870 — 10

log. c . sin. (A+B+C) = 3,9563436 = log. 9044.
folglich

20. die Breite für Nr. 3 = + 8663 — 7016 + 9044
= + 10691, mithin östlich.

21. Für Nr. 4 endlich wird

die Länge = a cos. A — b cos. (A + B)
+ c cos. (A+B+C) — d cos. (A+B+C+D)

die Breite = a sin. A — b sin. (A + B)
+ c sin. (A+B+C) — d sin. (A+B+C+D)

22. Nun ist A + B + C + D = 782°46′, also
cos. (A+B+C+D) = cos. 62°46′, und eben so
sin. (A+B+C+D) = sin. 62°46′.

23. Ferner log. d = 3,9369157
log. cos. (A+B+C+D) = 9,6605005 — 10

---

log. d cos. (A+B+C+D) = 3,5974162 = log. 3957,
folglich ist

24. die Länge von Nr. 4 = 4414 — 2503
+ 4265 — 3957
= + 2219, also ebenfalls nördlich.

25. Eben so ist log. d = 3,9369157
log. sin. (A+B+C+D) = 9,9489752 — 10

---

log. d sin. (A+B+C+D) = 3,8858909 = log. 7689;
folglich wird

26. die Breite für Nr. 4 = 8663 — 7016
+ 9044 — 7689
= + 3002, also östlich

III. Abschnitt.

Vom Zulegen eines Zuges, oder von den Markscheider-Rissen.

§. 148.

Erklärung:

Im verjüngten Maaße eine der söhligen Projection eines Zuges (§. 143) ähnliche Figur verzeichnen, heißt den Zug söhlig zulegen, einen Grundriß, oder söhligen Riß verfertigen (§. 180, e. Geom.)

I. Zusatz: Wenn man im verjüngten Maaße die Sohlen eines Zuges der Ordnung nach, und in eben den Stunden, in welchen sie streichen, verzeichnet, so erhält man den söhligen Riß dieses Zuges (§. 143, VI. Zusatz).

II. Zusatz: Trägt man für einen gegebenen Punct der Ordnung nach die ganzen Längen und ganzen Breiten aller übrigen Puncte im verjüngten Maaße auf, und zieht die Endespuncte der ganzen Breiten in eben der Ordnung durch gerade Linien zusammen, so erhält man ebenfalls den söhligen Riß des Zuges (§. 144, V. Zusatz).

§. 149.

Aufgabe:

Die Abweichung der Magnetlinie (§. 83, c.) zu finden.

Auflösung:

Man bringe den Häng- oder Setz-Compaß in eine solche Lage, daß die Linie Se. — Me. des Compasses mit der gezogenen Meridianlinie parallel läuft, und zugleich Se. gegen Nord, und Me. gegen Sud gekehret ist, so giebt die nördliche Spitze der Magnetnadel am eingetheilten Rande die Abweichung.

Zusatz: Giebt man dem Zuleginstrumente (Fig. 30) so eine Lage, daß die Nadel genau nach der Linie Se. — Me. spielet, und die nördliche Spitze zugleich gegen Se., mithin die südliche gegen Me. gekehrt ist, und zieht nun längst AB eine gerade Linie AE, drehet dann das Instrument um A, bis die nördliche Spitze der Nadel am Rande die gefundene Abweichung anzeiget, zieht dann wieder längst der Seite AB die Linie Am, so stellet Am die Mittagslinie, AE die Magnetlinie, und mAE die Abweichung vor.

§. 150.

Aufgabe:

Einen mit dem Compaß oder der Eisenscheibe verrichteten und berechneten Zug schlig zuzulegen.

I. Auflösung;

1. Man bringe das Zuleginstrument (Fig. 30) über den gewählten Anfangspunct A in so eine Lage, daß die Magnetnadel genau in der Richtung Se. — Me., und zwar die nördliche Spitze gegen Se. spielet, und ziehe

2. längst der Seite AB des Instrumentes die Linie AE.

3. Jetzt drehe man das Instrument um A, bis die nördliche Spitze die Stunde weiset, in welcher die erste abgezogene Linie streichet, und ziehe dann

4. längst der Seite AB die Linie Am, und auf dieser verzeichne man im verjüngten Maaße die erste Sohle

5. An den Endespunct dieser Sohle wird wieder das Instrument angelegt, und unter dem gegebenen Streichen in eben dem verjüngten Maaße die zweyte Sohle aufgetragen.

6. Verfährt man auf eben diese Art bey allen folgenden, so erhält man den verlangten söhligen Riß des Zuges (§. 110, und §. 148, I. Zusatz).

II. Auflösung:

1. Man ziehe eine beliebige gerade Linie, als die Richtung der Magnetlinie für den Anfangspunct

der Vermessung, man bemerke also die nördliche Spitze mit Se., und die südliche mit Me., oder erstere mit N, letztere mit S.

2. In dieser Linie als Längenlinie, nehme man einen beliebigen Punct A, als den Anfangspunct des Grundrisses, oder Projection des ersten Punctes.

3. Von A trage man aus dem berechneten Zugbuche im verjüngten Maaße die ganzen Längen für jeden Punct der Ordnung nach auf, und zwar die positiven auf die nördliche, und die negativen auf die südliche Seite.

4. Nun errichte man durch die Endespuncte dieser Längen Perpendikel, und verzeichne auf ihnen im nemlichen verjüngten Maaße die entsprechenden ganzen Breiten, und zwar die positiven auf die östliche, die negativen auf die westliche Seite der Magnetlinie.

5. Endlich ziehe man durch die Endespuncte dieser Breiten der Ordnung nach gerade Linien, so erhält man

6. den verlangten söhligen Riß (§. 148, II. Zusatz). Man vergleiche den 9ten §.

I. Zusatz: In beyden Auflösungen muß man noch die Richtung der Mittagslinie (§. 149, Zus.) und den gebrauchten Maaßstab verzeichnen.

II.

II. Zusatz: Die 48ste Figur stellet als Beyspiel der zweyten Auflösung den Grundriß des in der dritten Tabelle eingeschriebenen und berechneten Zuges vor, und Fig. 50 den verjüngten Maaßstab.

Anmerkung: Die erste Auflösung wird ungeachtet aller angewandten Mühe und Zeit nie die gehörige Genauigkeit geben; durch das vom Herrn Oberverweser von Voith verbesserte Zuleginstrument wird allerdings viel an Zeit, aber nichts an Richtigkeit gewonnen; indessen kann man doch mit diesem Instrumente einen Riß entwerfen, der, als Brouillon, bey der zweyten Auflösung sehr nützliche Dienste leistet.

§. 151.

Aufgabe:

Einen mit Schnüren abgezogenen und berechneten Zug söhlig zuzulegen.

I. Auflösung:

1. Man trage auf einer gezogenen geraden Linie im verjüngten Maaße die erste Sohle auf, und

2. verzeichne an ihrem Endespuncte den Winkel der beyden ersten Sohlen (§. 356, Trigon.)

3. Nun nehme man auf diesem so eben bestimmten zweyten Schenkel nach dem verjüngten Maaße die Länge der zweyten Sohle.

4. Wiederholt man dieses Verfahren der Ordnung nach bey allen folgenden Winkeln und Sohlen, und

5. verzeichnet am Ende die Meridianlinie, so erhält man den verlangten Grundriß.

II. Auflösung:

Man verfahre ganz nach der Anleitung der zweyten Auflösung im vorhergehenden §.

I. Zusatz: Aus dem söhligen Risse läßt sich unmittelbar die Sohle einer jeden Donlage des zugelegten Zuges angeben, so z. B. (Fig. 48) giebt 1 — 2 die Größe der Sohle für die Donlage Nr. 1 — Nr. 2 im verjüngten Maaße, und eben so die gerade Linie, die man im Grundrisse zwischen 2 und 4 zieht, die Sohle der Donlage zwischen Nr. 2 und Nr. 4; denn der söhlige Riß stellt im verjüngten Maaße die söhlige Projection aller Donlagen, oder des ganzen Zuges vor (§. 148). Die söhligen Projectionen aber haben mit den entsprechenden Sohlen der Donlagen gleiche Größe (§. 143, V. Zusatz).

II. Zusatz: Zieht man im Grundrisse (Fig. 48) durch ein Eck, z. B. Nr. 3 mit der Magnetlinie Se. — Me. die parallele s — m, so giebt Winkel S 3, 2 das Streichen der Donlage Nr. 2 — Nr. 3

(§. 143,

(§. 143, V. Zus.); zöge man noch die gerade Linie 3 — 5, so erhielte man das Streichen der zwischen Nr. 3 und Nr. 5 gezogenen Donlage.

§. 152.

Erklärungen: (Fig. 51)

a) Wenn man durch den Punct A der Donlage AB die söhlige Ebene MN leget, und durch einen beliebigen Punct G in dieser Ebene die seigere Ebene GHKI setzet, ferner aus A und B auf letztere Ebene die Lothe Aa und Bb ziehet, so heissen

α) die Puncte a, b die Projectionen von A und B,

β) die gerade Linie ab die Projection der Donlage AB auf der seigeren Ebene GHKI.

b) Verzeichnet man auf einer Ebene die seigern Projectionen aller Puncte, oder Donlagen im verjüngten Maaße, so erhält man einen Seigerriß, oder legt den Zug seiger zu.

§. 153.

Lehrsatz:

Wenn man durch den Anfangspunct A (Fig. 51) der Donlage AB die söhlige Ebene MN legt, und in

ihr

ihr die beliebige Linie GH zieht; ferner von den beyden Endespuncten A, C der Sohle, auf GH die Perpendikel Aa, Cc, und endlich durch c auf die Ebene MN die senkrechte Linie cb = der Seigerteufe BC errichtet, so sind a, b die seigern Projectionspuncte von A und B, so wie die Linie ab die seigere Projection der Donlage AB.

Beweis:

1. Cc und Aa stehen beyde auf der seigern Ebene GHKI senkrecht (§. 170, I. Zusatz, Geometrie), mithin ist

2. der Punct a die seigere Projection von A (§. 152).

3. bc liegt ganz in der seigern Ebene GHKI (§. 170, IV. Zus. Geom.), und

4. bc # BC (§. 165, I. Geom.), ferner bc = BC (per hyp.), also

5. wenn man Bb zieht, so ist

$$Bb \overset{=}{\#} Cc$$ (§. 51, VII. Zus. Geom.)

6. Nun steht Cc auf der seigern Ebene GHKI senkrecht, mithin auch Bb (§. 165, II. Geometrie), folglich

7. ist b der seigere Projectionspunct von B, so wie ab von der Donlage AB (§. 152).

I. Zusatz: Legt man durch den Anfangspunct A eines Zuges, das ist, mehrerer aufeinander folgender Donlagen AB, BC, CD u. s. w. die söhlige Ebene MN, und zieht in ihr eine beliebige gerade Linie GH; errichtet ferner durch die söhligen Projectionspuncte A, b, c, d (§. 143) in der söhligen Ebene MN auf GH die Perpendikel Aa, bβ, cγ, dδ, und durch a, β, γ, δ, auf die Ebene MN die senkrechten Linien βb, γc, δd (da A in der Ebene selbst liegt, so wird aa=o), welche den entsprechenden Höhen oder ganzen Seigerteufen der Ordnung nach gleich sind; so sind a, b, c, d die Projectionen von A, B, C, D, so wie die Linien ab, bc, cd die Projectionen der Donlagen AB, BC, CD auf die seigere Ebene durch GH sind.

II. Zusatz: Zieht man längst einem söhligen Risse (Fig. 48) eine beliebige gerade Linie GH, und (Fig. 49) auf sie aus allen Ecken 1, 2, 3 u. s. s. Perpendikel, trägt ferner auf diesen Perpendikeln, oder ihren Verlängerungen im verjüngten Maaße die entsprechenden ganzen Seigerteufen, oder Höhen und Tiefen auf, so erhält man den entsprechenden Seigerriß dieses Zuges (§. 152).

III. Zusatz: Da (Fig. 49) der in der III. Tabelle eingeschriebene Zug lauter negative ganze Seigerteufen giebt (§. 145), mithin alle Puncte tiefer als A liegen, so liegen im Seigerrisse alle Projecti-

jectionspuncte unter GH, oder auf den verlängerten Perpendikeln; fände man für einen oder mehrere Puncte ihre ganzen Seigerteufen positiv, so müßte man solche auf den obern Seiten von GH verzeichnen.

IV. Zusatz: Wenn man aus dem Seigerrisse für zwey Puncte z. B. 3, 5 (Fig. 49) ihre ganze Seigerteufen von einander abzieht, so giebt ihr Unterschied die Seigerteufe der zwischen Nr. 3 und 5 gezogenen Donlage (§. 143, IV. Zus.), das ist, — 6143 + 5792 (§. 145) = — 351 = der Seigerteufe 5 — 3, so wie + 351 jene für Nr. 3 — 5.

§. 154.

Erklärungen:

a) Die Linie GH (Fig. 48 und 49) auf welche von den Puncten des söhligen Risses die Perpendikel gezogen, und auf letztern die ganzen Seigerteufen aufgetragen werden (§. 153, II. Zus.) heißt die **Horizontallinie.**

b) Zieht man bey Verfertigung eines Seigerrisses die Horizontallinie zur Länge des Grubengebäudes parallel, so heißt der Riß ein **Längendurchschnitt,** oder schlechthin Seigerriß.

c) Wird aber die Horizontallinie auf die Länge des Grubengebäudes senkrecht, mithin zur

vorhergehenden unter einem rechten Winkel gezogen, so heißt dieser Seigerriß ein Querschnitt.

d) Wird endlich zu einem söhligen Risse einer oder beyde entsprechende Seigerrisse beygefüget, so heissen sie zusammen ein Standriß.

Zusatz: Fig. 48 — 50, und Fig. 52 — 54 stellen zwey Standrisse vor, wo im zweyten dem söhligen Risse (Fig. 52) sowohl der Längen = (Fig. 53) als Querdurchschnitt (Fig. 54) beygefüget ist.

Anmerkung: In Baiern und Ungarn ist's gewöhnlich dem Längendurchschnitt allemal einen Querdurchschnitt beyzufügen.

§. 155.

Aufgabe:

Aus einem verfertigten Standrisse die Größe, Neigung und das Streichen einer beliebigen Donlage anzugeben, z. B. aus (Fig. 48 und 49) die Donlage von Nr. 3 — 4 zu finden.

Auflösung:

1. Man verzeichne (Fig. 55) einen rechten Winkel BAC.

2. Aus dem Grundrisse nehme man die entsprechende Sohle 3 — 4, und trage sie auf den Schenkel AC

als Grundlinie auf, das ist Ac = Sohle Nr. 3 — 4 (§. 151, I. Zus.)

3. Nun nehme man die Differenz der beyden ganzen Seigerteufen Nr. 3 und Nr. 4, = Ab, so ist sie die Seigerteufe der gesuchten Donlage (§. 153, IV. Zusatz).

4. Man trage sie also auf den andern Schenkel AB auf, und ziehe bc, so ist

5. solche die Donlage von Nr. 3 — 4, und Acb die Neigung derselben (§. 24, Geom.)

6. Zieht man endlich durch Nr. 3 im söhligen Risse zur Magnetlinie eine Parallele, so kann man mit dem Zuleginstrumente ihr Streichen, mithin jenes der Donlage (§. 151, II. Zus.) finden.

Anmerkung: Ein Standriß gewährt einen anschaulichen Ueberblick über einen ganzen Grubenbau, und ist daher sehr nützlich, aber er macht die Berechnungen nichts weniger als entbehrlich; nicht aus dem Standrisse, sondern aus dem Zugbuche müssen die Auflösungen der meisten Aufgaben bestimmt werden, wenn ihnen die gefoderte Schärfe zukommen soll; es läßt sich wohl sehr leicht einsehen, daß bey Auftragung eines Winkels, und einer Linie im verjüngten Maaße auf das Papier sich allmal unvermeidliche Fehler einschleichen.

§. 156.

Lehrsatz: (Fig. 56)

Für den gegebenen Punct C ist durch die Neigung, und das Streichen die Lage einer schiefen Ebene vollkommen bestimmt.

Beweis:

1. Man lege durch C eine söhlige Ebene, welche die schiefe in CA schneidet.

2. Stellet ferner CP den nördlichen Theil der Magnetlinie vor, so ist

3. durch das Streichen der Winkel ACP (§. 85, b), also die Lage der beyden Puncte C, A bestimmt.

4. Zieht man nun aus einem beliebigen Puncte B der schiefen Ebene auf die Durchschnittslinie CA den Perpendikel Bm, und auf die söhlige Ebene die seigere Linie Bn, so ist der Neigungswinkel Bmn ebenfalls gegeben, mithin

5. die Lage des dritten Punctes B, folglich

6. die Lage der ganzen schiefen Ebene bestimmt. (§. 161, c. Geom.)

Zusatz: Zieht man in der schiefen Ebene die beliebige söhlige Linie ca, so hat sie mit ihr gleiches Streichen; denn ca ∥ CA (§. 172, II. Zusatz), folglich

folglich hat ca mit CA (§. 86), also auch mit mit der schiefen Ebene ACB (§. 85) gleiches Streichen.

§. 157.

Aufgabe:

Auf der schiefen Ebene ACB (Fig. 56), deren Streichen und Neigung gegeben ist, sey eine Linie CB gezogen, deren Streichen ebenfalls bekannt ist; man soll den Winkel ACB suchen, welchen CB mit der durch ihren Anfangspunct C gezogenen söhligen Linie CA einschließt.

I. Auflösung:

1. Wenn PQ die Richtung der Magnetlinie, und P ihre nördliche Spitze bezeichnet, so ist durch das Streichen der schiefen Ebene der Winkel ACP gegeben (§. 85, b).

2. Legt man durch die Linie CB die seigere Ebene BCH, zieht ihre Seigerteufe Bn und Sohle Cn, so ist durch das Streichen der Linie CB der Winkel PCn bekannt.

3. Man bestimme also aus ACP und nCP den Winkel ACn; für den in der Figur angenommenen Fall ist $ACn = ACP - nCP$.

4. Zieht man nun aus C mit dem Halbmesser CB in der seigern Ebene den Bogen BH bis an ihren

söhli=

söhligen Durchschnitt CH, in der schiefen Ebene den Bogen BA bis an die söhlige Durchschnittslinie CA, und endlich in der söhligen Ebene den Bogen AH, so erhält man

5. das rechtwinklichte sphärische Dreyeck AHB

6. Bezeichnet man mit diesen größern Buchstaben die Winkel, ihre opponirten Seiten der Ordnung nach mit den kleinern Buchstaben a, h, b, so ist

7. durch die Neigung der schiefen Ebene der Winkel Bmn = A, ferner H = 90°, und aus Nr. 3 ACn = b gegeben, und der Winkel ACB = h vom Dreyecke wird gesucht, also

8. $\cot. h = \frac{\cos. A \cdot \cot. b}{r}$ (I. Tab. IV. Fall, Nr. 3. sph. Trig. §. 393), das ist.

9. $\cot. ACB = \frac{\cos. Bmn \cdot \cot. ACn}{r}$

II. Auflösung:

Man messe die Donlage CB, und die söhlige Linie CA; ferner die Sehne, oder gerade Linie AB, und berechne den Winkel ACB nach §. 114.

Anmerkung: Die zweyte Auflösung verdient allemal, wo ihre Anwendung möglich ist, ihrer Einfachheit wegen den Vorzug.

I. Zusatz: Aus dem gegebenen Streichen der Donlage CB, und der söhligen Linie AC läßt sich allemal leicht beurtheilen, ob CA auf der östlichen oder westlichen Seite der Magnetlinie liegt, und wie aus den beyden Winkeln ACP, und nCP der Winkel ACn in der ersten Auflösung zu bestimmen ist.

II. Zusatz: Sind in einer schiefen Ebene, deren Streichen und Neigung bekannt ist, mehrere aufeinander folgende Donlagen nebst ihren Streichen gegeben, so läßt sich bey jeder der Winkel, welchen sie mit der durch ihren Anfangspunct gezogenen söhligen Linie macht, auf die nemliche Art bestimmen.

III. Zusatz: Zieht man auf dem Papier eine beliebige gerade Linie CA, und trägt an C die erste Donlage CB unter dem gefundenen Winkel ACB, im verjüngten Maaße auf, zieht wieder durch B eine Parallele zu CA, und verzeichnet unter dem gefundenen entsprechenden Winkel im verjüngten Maaße die zweyte Donlage, und verfährt endlich auf die nemliche Art der Ordnung nach bey allen folgenden Donlagen, die in der nemlichen Ebene liegen, so erhält man einen Flacheriß, wo die Linien gegeneinander die nemliche Lage, wie die Donlagen auf der gegebenen Ebene haben.

IV. Zusatz: Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke AHB ist:

r : sin. b = tang. A : tang. a (§. 393. Tabelle, IV. Fall, sph. Trigon.), oder

r : sin. ACn = tang. Bmn : tang. BCn,

mithin

$$\text{tang. BCn} = \frac{\text{sin. ACn . tang. Bmn}}{r}$$

Folglich läßt sich aus der Neigung und dem Streichen der schiefen Ebene, und aus dem Streichen der Linie CB, die Neigung derselben bestimmen.

§. 158.

Aufgabe:

Für mehrere aufeinander folgende Donlagen, welche in einer Ebene liegen, deren Neigung und Streichen gegeben ist, einen Flacheriß zu verzeichnen.

Auflösung:

1. Man verrichte nach der Anweisung des 127. §. einen Zug.

2. Nun bestimme man nach der I. oder II. Auflösung §. 157 der Ordnung nach die Winkel, welche die Donlagen mit der söhligen Linie durch ihren Anfangspunct machen, und

3. verzeichne nach dem III. Zus. §. 157 den verlangten Flacheriß.

Anmerkung: In Freyberg sind nach Herrn Lempe die eben angeführten Flacherisse nicht ungewöhnlich.

§. 159.

Aufgabe:

In der schiefen Ebene ACB (Fig. 56), deren Neigung Bmn, und Streichen ACP bekannt ist, sey die Linie CB gezogen, von welcher die Neigung BCn ebenfalls gegeben ist; man soll ihr Streichen nCP suchen.

Auflösung:

1. Man verzeichne aus C mit dem Halbmesser CB in der seigern Ebene durch BC den Bogen BH, in der söhligen Ebene durch C den Bogen AH, und in der schiefen Ebene durch ACB den Bogen AB, so erhält man das rechtwinklichte sphärische Dreyeck ABH.

2. Bezeichnet man die Winkel desselben mit A, B, H, und ihre opponirten Seiten mit a, b, h, so ist

3. Bmn = A, ferner BCn = BH = a gegeben, und überdieß H = 90°, folglich ist

4. tang. A : tang. a = r : sin. b (I. Tabelle sph. Trigon. III. Fall), mithin

$$\text{sin. b} = \frac{\text{r . tang. a}}{\text{tang. A}}, \text{ das ist}$$

$$5.\ \text{sin. mCn} = \frac{\text{r . tang. BCn}}{\text{tang. Bmn}}$$

6. Aus dem Winkel mCn und dem gegebenen ACP läßt sich nun in jedem Falle leicht nCP bestimmen, bey dem in der Figur angenommenen Falle ist nCP = ACP — mCn.

IV. Hauptstück.

Von den Auflösungen der zum Behufe des Bergbaues vorkommenden Aufgaben.

I. Abschnitt.

Vom Wasserwägen

§. 160.

Lehrsätze:

a) Ein Stolln sowohl, als jede Strecke muß immer so getrieben werden, daß ihre Sohle die gehörige Neigung zur Abführung des Wassers hat.

b) Das Steigen oder Fallen der Sohle (die Rösche) eines Stollns oder Strecke, welche 100 Lachter lang ist, soll nicht weniger als $\frac{1}{8}$ Lachter, aber auch nie mehr als $\frac{1}{4}$ Lachter betragen; das ist (Fig. 57) für die Sohle

AB

AB = 100 Lachter = 10000 Zoll, muß BC wenigstens $\frac{1}{8}$ L. = 12,5 Zoll; höchstens aber $\frac{1}{4}$ L. = 25 Zoll seyn.

Anmerkung: Man sehe von Oppels Anleitung zur Markscheidekunst §. 783 — 785. Zur Vergleichung und Erläuterung dieses trefflichen Werkes werde ich im gegenwärtigen Hauptstücke fast immer die §§. anführen, wo die nemlichen Aufgaben im letztern vorkommen.

I. Zusatz: Für BC = 12,5 Zoll, und AB = 10000 Zoll wird sin. BAC $= \frac{1 \cdot BC}{AB}$ = sin. 0° 4′ 18″, und

$AC = \frac{AB \cdot \cos. BAC}{1}$ = 9999,99 Zoll

= 10000;

II. Zusatz: Für BC = 25 Zoll, und AB = 10000 Zoll wird die Neigung BAC = 0°8′36″, und die söhlige Länge AC = 9999,97, also ebenfalls = 10000 Zoll.

III. Zusatz: Wenn von den drey Stücken, der Sohle AB, Rösche BC, Neigung BAC, zwey gegeben sind, so läßt sich allemal das dritte trigonometrisch berechnen.

IV. Zusatz: Es mag die Rösche auf 100 Lachter $\frac{1}{8}$, oder $\frac{1}{4}$ Lachter betragen, so ist AC der Größe nach mit AB gleichgeltend (I. u. II. Zus.)

§. 161.

Aufgabe:

Die Rösche x für n Lachter einer Sohle zu finden, wenn für m Lachter die Rösche = p Zoll bestimmt ist.

Auflösung:

$$m : n = p : x; \text{ mithin}$$

$$x = \frac{np}{m} \text{ Zolle.}$$

I. Zusatz: Setzt man m = 100 Lachtr p = 25 Zoll, n = 325 Lachtr, so ist die Rösche x = 81,25 Zoll.

II. Zusatz: Die für 100 Lachtr treffende Rösche p muß jedesmal dem Zwecke gemäß nach hydraulischen und architektonischen Grundsätzen, die ausser der Sphäre der Markscheidekunst liegen, bestimmt werden.

III. Zusatz: Bildet die Sohle eines zutreibenden Ortes, oder das Bett einer zuführenden Wasserleitung eine gebrochene Linie, so kann man für jeden einzelnen Theil derselben ihre treffende Rösche berechnen.

§. 162.

Aufgabe:

Am Tage von einem gegebenen Puncte A aus (Fig. 58) nach e oder f zu nivelliren.

I. Auflösung:

Wenn man eine Wasserwage bey der Hand hat, so verfahre man wie §. 375 oder 376 Trigon., und bestimme das Steigen von e, so wie das Fallen von f im Bergmaaße, das ist, in Lachtern, Zehentl u. s. f.

II. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis e, und eben so von A bis f mit dem Gradbogen einen Zug (§. 127).

2. Berechne die ganzen Seigerteufen für e sowohl, als f (§. 143, IV. Zus.), welche das gesuchte Steigen von e, und Fallen von f angeben.

Anmerkung: Ich setze bey der I. Auflösung, so wie bey dem ganzen gegenwärtigen Abschnitte die Kenntniß des III. Abschnittes vom III. Hauptstücke der Trigonometrie voraus. Es versteht sich von selbst, daß die Maaßstäbe sowohl, als die §. 370 allda angegebenen Absteckstäbe für den Markscheider in Lachter, Zehentl u. s. w. eingetheilt seyn müssen.

§. 163.

Aufgabe:

Von einem gegebenen Puncte A am Tage, nach einem andern gegebenen Puncte D zu, eine söhlige Linie abzustecken.

I. Auflösung: (Fig. 59)

1. Man bestimme die scheinbare Horizontallinie AB (§. 371, Trigon.), und messe sie.

2. Nun berechne man für diese Weite das Gefäll (§. 372, Trigon.)

3. Endlich nehme man am Stabe BD die Länge Bb diesem Gefälle gleich, so ist

4. Ab die gesuchte söhlige Linie.

II. Auflösung:

Man verfahre nach der Anleitung des 121. §., suche wieder wie Nr. 2 das Gefäll, und bestimme daraus den Punct b, so ist wieder Ab die gesuchte söhlige Linie.

I. Zusatz: Wenn AB nicht sehr lang ist, so kann man sie selbst als die gesuchte söhlige Linie annehmen.

II. Zusatz: Ist für den Punct A die Tiefe Aa eines Teiches gegeben, so läßt sich für jede Stelle D die Höhe Db des nothwendigen Dammes bestimmen, folglich der ganze Wasserspiegel des Teiches abstecken.

§ 164.

Aufgabe:

Ueber Tage von einem Orte A nach einem andern D eine gerade oder gebrochene Linie zu ziehen, welche bey m Lachter eine Rösche von p Zoll hat.

Auflösung:

1. Läßt sich von A nach D ein Zug in gerader Richtung, das ist, so verrichten, daß alle Donlagen in der nemlichen seigern Ebene liegen, so nehme man solchen vor,

2. Berechne die Sohlen, und für die Summe dieser Sohlen die treffende Rösche.

3. Nun stecke man von A (Fig. 59) nach D die söhlige Linie AB aus, und nehme auf den bey D seiger stehenden Stab den Punct b um so viel höher, oder tiefer, als es die gefundene Rösche erfodert, so ist

4. Ab die verlangte Linie.

5. Kann man aber von A nach D nicht in gerader Richtung kommen, so verrichte man von A nach D ebenfalls einen Zug, und berechne die Sohlen, und

6. für jede dieser Sohlen die entsprechende Rösche,

7. Stecket man endlich diese Sohlen ab, und nimmt bey jeder die zugehörige Rösche; so ist die verlangte gebrochene Linie abgegeben.

Anmerkung: Auf dieser vorhergehenden Aufgabe beruht das Ausstecken einer anzulegenden Wasserleitung. Mehrere Kenntnisse muß sich der Markscheider aus der Theorie des Wasserbaues, die ausser dem Gebiethe der Markscheidekunst liegt, erwerben. Man vergleiche Oppel's Anleitung §. 827 — 842.

II. Abschnitt.

Von der Abgabe zweyer übereinstimmenden Puncte.

§. 165.

Aufgabe:

Es sind im Gebirge zwey Puncte A, F' gegeben, man soll die Größe und Lage der geraden Linie AF', das heißt, die Größe, Neigung und das Streichen der Donlage AF' finden (Oppel §. 791).

I. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis F' einen Zug. (§. 127 — 132),

2. berechne und trage solchen in das Zugbuch ein (§. 140 und 141).

3. Lege diesen Zug söhlig (§. 150 und 151), und seiger zu (§. 153, II Zus.)

4. Aus dem verfertigten Standrisse bestimme man nun die Größe, Neigung und das Streichen der Donlage AF′ (§. 155).

II. Auflösung:

5. Man verrichte wieder von A bis F′ einen Zug, und berechne ihn (Nr. 1 und 2).

6. Wenn nun für eine söhlige Ebene durch den ersten oder Anhaltspunct A die gebrochene Linie ABCDFFA (Fig. 60) die söhlige Projection des verrichteten Zuges vorstellet, so sind

7. Aus dem berechneten Zugbuche alle Seiten derselben, AF ausgenommen, bekannt.

8. Aus dem bekannten Streichen eben dieser Linien lassen sich die söhligen Winkel B, C, D, E mit Ausnahme von A, F bestimmen (§. 130, III. u. IV. Zusatz).

9. Da nun von der gebrochenen Linie alles bis auf die Seite AF, und die beyden anliegenden Winkel A, F bekannt ist, so lassen sich diese aus §. 20 berechnen.

10. Ferner suche man die ganze Seigerteufe von F′ oder F′F (§. 143, IV. Zus.), so ist

11. aus der söhligen Entfernung AF, der ganzen Seigerteufe F'F die Länge und Neigung der Donlage AF' bestimmt, denn

$$AF' = \sqrt{(AF^2 + F'F^2)}, \text{ und}$$

$$\text{tang. } F'AF = \frac{r \cdot F'F}{AF}.$$

12. Aus dem Streichen von AB, und dem Winkel A läßt sich endlich das Streichen von AF oder der Donlage AF' angeben (§. 130).

§. 166.

Aufgabe:

Von einem gegebenen Puncte A soll man einen Schacht seiger absinken, wie groß ist seine Teufe, bis er mit einem andern tiefer liegenden Puncte B söhlig löchert, d. i., bis er mit der söhligen Ebene durch B zusammentrifft (Oppel §. 793).

Auflösung:

1. Man verrichte von A bis B einen Zug,

2. berechne daraus die ganze Seigerteufe von B, so ist solche die gesuchte Teufe des Schachtes.

§. 167.

Aufgabe:

Im Gebirge ist ein Punct A angewiesen, von welchem ein Ort in gerader Richtung bis über, oder

unter einem andern Puncte F' einkömmt, man soll die Länge und das Streichen dieses zutreibenden Ortes AF, so daß F seiger über oder unter F' liegt, angeben (Oppel §. 798).

I. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis F' einen Zug,

2. berechne und lege ihn söhlig zu,

3. Aus dem Grundrisse bestimme man die söhlige Entfernung AF, und ihr Streichen (§. 151, I. und II. Zusatz).

II. Auflösung:

Man verfahre ganz nach der Anleitung des 165sten §es Nr. 5 — 12, nur kann Nr. 11 als überflüßig wegbleiben.

Zusatz: Wenn die Größe des zutreibenden Ortes gefunden ist, so läßt sich leicht die Rösche oder das zur Wasserseige nöthige Ansteigen desselben angeben (§. 161).

§. 168.

Aufgabe:

Von einem gegebenen Puncte F' wird ein Schacht seiger abgesunken; von einem tiefer liegenden Puncte A wird in gerader Richtung nach diesem Schachte ein

Ort

Ort getrieben; man soll die Teufe des Schachtes, bis er auf die Sohle des getriebenen Ortes löchert, angeben (Oppel §. 800).

Auflösung:

1. Man verrichte von A bis F' einen Zug, berechne solchen, und suche die ganze Seigerteufe von F' = F'F.

2. Nun lege man entweder den Zug söhlig zu, und bestimme aus dem Grundrisse die söhlige Entfernung AF, oder

3. berechne solche nach §. 165, Nr. 6 — 9.

4. Für diese Entfernung AF suche man die treffende Rösche (§. 161), oder Ff.

5. Nun bestimme man endlich die ganze Seigerteufe von F', oder F'F, und ziehe davon die Rösche ab, so ist

6. die gesuchte Teufe des Schachtes F'f = F'F — Ff.

Anmerkung: In den beyden vorhergehenden Aufgaben wurde angenommen, daß die Sohle des zutreibenden Ortes von A gegen F ansteige, welches der gewöhnliche Fall ist; sollte das Gegentheil Staat haben, so müßte man Nr. 6 die Rösche addiren, das ist, F'f = F'F + Ff setzen.

§. 169.

§. 169.

Aufgabe:

Man soll von einem gegebenen Puncte A aus ansitzen, und bis in einem andern gegebenen Puncte F' erschlagen, das heißt, zwischen A und F' eine gerade Communication herstellen, um frische Wetter zu bringen, oder Wässer abzuzapfen; man suchet nun das Maaß und die Lage des Durchschlages, das heißt, die Größe, Neigung, und das Streichen der Donlage AF' (Oppel §. 802),

Auflösung:

Man verfahre ganz nach §. 165.

Zusatz: Will man, um den Durchschlag zu beschleunigen, von F' entgegenarbeiten, das ist, bey A und F' Gegenörter treiben, so ist aus §. 165 für F' alles wie für A, nur daß F'A eben so fällt, als AF' ansteiget (Oppel §. 803).

§. 170.

Erklärung:

Wenn von einem gegebenen Puncte A aus ein anderer F' abgegeben werden soll, und man nimmt in der Gegend, wo der Vermuthung gemäß F' liegt, einen andern Punct E', verrichtet von A bis E' einen Zug, um daraus die Lage von F' zu finden, so heißt dieses Verfahren: einen Zug nach der verlornen Schnur verrichten (Oppel §. 806.).

§. 171.

§. 171.

Aufgabe:

Vom gegebenen Puncte A aus, einem andern F' abzugeben, dessen söhlige Entfernung AF eine gegebene Länge und gegebenes Streichen hat (Oppel §. 80).

I. Auflösung:

1. Man wähle sich einen Punct E', von dem man vermuthet, daß er entweder der gesuchte F' selbst, oder nicht weit davon entfernt sey, und verrichte von A bis E' einen Zug, das ist, man verrichte einen Zug nach verlorner Schnur, und berechne solchen.

2. Verfertige davon den Grundriß ABCDE (Fig. 60).

3. Nun verzeichne man an A unter dem gegebenen Streichen und von gegebener Länge im verjüngten Maaße die Linie AF;

4. ziehe die gerade Linie EF, so stellt sie im verjüngten Maaße die söhlige Entfernung der beyden Puncte E, F' vor, und hat mit ihr gleiches Streichen (§. 151, I. u. II. Zusatz), man suche beydes, und

5. gebe vom angenommenen Puncte E' unter diesem Streichen in dieser söhligen Entfernung EF einen Punct ab, so ist dieser der gesuchte F'.

II. Auflösung:

6. Man verrichte von A bis E' mit verlorner Schnur einen Zug.

7. Stellet nun ABCDEFA die söhlige Projection dieses Zuges nebst dem Puncte F' vor, so sind von dieser gebrochenen Linie die Seite AF unmittelbar, und alle übrigen, EF ausgenommen, aus dem berechneten Zugbuche gegeben.

8. Ferner lassen sich aus dem bekannten Streichen eben dieser Linien die eingeschlossenen Winkel (§. 130, III. und IV. Zus.) angeben, nur E und F ausgenommen.

9. Man berechne daher die Seite EF nebst den beyden anliegenden Winkeln (§. 20), und

10. aus E bestimme man das Streichen eben dieser Linie (§. 130), so ist

11. die söhlige Entfernung der beyden Puncte E' und F' gefunden, woraus sich

12. der Punct F' nach Nr. 5 abgeben läßt.

§ 172.

Aufgabe:

Von einem gegebenen Puncte A aus wird in einer gegebenen Stunde ein Ort getrieben; man soll über Tag einen andern Punct F' angeben, von welchem ein

seigerer

feigerer Schacht abzusinken ist, der auf die Sohle dieses Ortes da niedergehen soll, wohin man mit dem Orte gelanget ist, wenn es vom gegebenen Puncte A aus eine gegebene Weite AF aufgefahren ist; d. h., man soll einen Punct F' so abgeben, daß der aus diesem Puncte F' abzusinkende seigere Schacht mit dem aus A in einer gegebenen Stunde getriebenen Orte, in der bestimmten Entfernung AF zusammenstosset (Oppel §. 809).

Auflösung:

Man verfahre nach der Anleitung des vorhergehenden Ses.

§. 173.

Erklärungen:

a) Ueber Tag einen Punct F' angeben, der seiger über einem gegebenen Puncte A in der Grube liegt, heißt den Punct A an den Tag bringen.

b) In der Grube einen Punct F' angeben, der seiger unter dem am Tage gegebenen Puncte A liegt, heißt den Punct A in die Grube fällen.

c) Ueberhaupt einen Punct F' angeben, der seiger über oder unter einem gegebenen Puncte A liegt, heißt den Punct A auf eine hö-

here

here Sohle bringen, oder im zweyten Falle, den Punct A in mehrere Teufe fällen.

d) Wird der Endespunct einer Strecke, oder Stollns, das ist, ganz Ort über Tag gebracht, so nennt man dieses: die Ortung an den Tag bringen (Oppel §. 812 — 814).

§. 174.

Aufgabe:

Einen in der Grube gegebenen Punct A an den Tag zu bringen (Oppel §. 811).

Auflösung:

Die Aufgabe ist ein spezieller Fall von §. 171, wo aber AF = o gesetzet werden muß, denn da F' seiger über A liegen soll, so fällt F mit A zusammen.

I. Zusatz: Wäre bey A ganz Ort, so würde durch die vorhergehende Auflösung die Ortung an den Tag gebracht.

II. Zusatz: Sollte A auf eine höhere Sohle gebracht werden, so bleibt die nemliche Auflösung, nur muß die Höhe der Sohle über A gegeben seyn.

III.

III. Zusatz: Sollte man aber den am Tage gegebenen Punct A in die Grube, oder den in der Grube gegebenen Punct A in mehrere Teufe fällen, so bleibt ebenfalls die nemliche Auflösung, nur muß die Teufe, in welcher F' liegen soll, gegeben seyn.

§. 175.

Aufgabe:

Anzugeben, wie tief ein Ort in das Gebirge eingekommen ist, das ist, die Tiefe des Endespunctes A von einem getriebenen Stolln oder Strecke unter der Oberfläche der Erde zu finden (Oppel §. 815).

Auflösung:

1. Man bringe den Punct A an den Tag (§. 174).
2. Nun bestimme man die ganze Seigerteufe des gefundenen Punctes F', so giebt
3. dieses die Teufe des eingekommenen Ortes.

§. 176.

Aufgabe:

Man soll die Teufe suchen, die ein Ort mit seiner Sohle in dem Gebirge einbringen wird, nachdem es von einem gegebenen Puncte A aus, in einer gegebenen Stunde, und in einer gegebenen Länge AF fortgetrieben worden (Oppel §. 816).

Auflö-

Auflösung:

1. Man suche am Tage den Punct F' (§. 171).

2. Für F' suche man ferner dessen ganze Seigerteufe, (§. 166); so giebt solche die Teufe, welche der Ort A einbringt.

§. 177.

Aufgabe:

Man soll

I. für zwey im Gebirge gegebene Puncte A, B die Gegenörter bestimmen, daß sie so durchschlägig werden, daß ihre Sohle in der geraden Linie AB liegt.

II. Ueber Tag in der gegebenen Entfernung von A und B einen Punct F' angeben, von welchem ein seigerer Schacht genau auf die Sohle AB trifft, und endlich

III. die Teufe dieses Schachtes angeben, bis er auf die Sohle von AB stoßt (Oppel §. 818).

Auflösung:

1. Man bestimme Nr. I. nach §. 169, und dessen Zusatz.

2. Den Punct F', nebst der Teufe des von F' abzusinkenden seigern Schachtes, das ist, Nr. II. und III. erhält man aus §. 176.

3. Zur Probe kann man F', sowohl von A als B aus, also zweymal suchen, um sich durch ihre Uebereinstimmung von der Richtigkeit des angegebenen Punctes F' und dessen Teufe zu überzeugen.

§. 178.

Aufgabe:

Einen Punct F' über Tag abzugeben, wo angesessen, und das Mundloch für einen Stolln genommen werden soll, der in einer gegebenen Stunde getrieben auf einen in der Grube gegebenen Punct A einkömmt (Oppel §. 819).

I. Auflösung:

1. Man verrichte nach verlorner Schnur (§. 170) von A bis E' einen Zug,

2. bey E' ziehe man zu beyden Seiten einen oder mehrere söhlige Markscheiderwinkel ab, z. B. E'G', E'H'.

3. Vom ganzen Zug verzeichne man den söhligen Riß ABCDEGEH (Fig. 60).

4. Durch A ziehe man im Grundrisse unter dem gegebenen Streichen des zutreibenden Stollns eine Linie, bis solche mit EG, oder EH in einem Puncte F zusammenstoßt, so ist

5. AF die söhlige Entfernung von A u. F', so wie EF jene von E' und F' im verjüngten Maaße (§. 57, Nr. I. Geom.)

6. Man messe also AF, und berechne die treffende Rösche (§. 161).

7. Ferner messe man auch EF nebst ihrem Streichen (§. 151, II. Zus.), und bestimme noch

8. die ganze Seigerteufe von E'.

9. Endlich stecke man bey E' die söhlige Entfernung EF nebst ihrem Streichen ab, vom Puncte F nehme man endlich den Punct F' soviel seiger abwärts, als die gefundene Rösche beträgt, wenn die ganze Seigerteufe von E' = o seyn, also E' mit A in der nemlichen söhligen Ebene liegen sollte.

10. Läge E' höher, so muß man den Punct F' von F seiger abwärts in einer Entfernung nehmen, welche der Summe der ganzen Seigerteufe von E' und der Rösche gleich, so wie

11. diese Entfernung dem Unterscheiden derselben gleich seyn muß, wenn E' tiefer als A läge, das ist, wenn E' tiefer liegt, als die Rösche beträgt, so muß man F' um so viel seiger aufwärts nehmen, als der Unterschied angiebt, ist aber die Seigerteufe kleiner, als die Rösche erfodert, so muß man um diesen Unterschied abwärts fahren.

II. Auflösung:

12. Man verfahre wie Nr. 1 und 2.

13. Durch A stelle man sich eine söhlige Ebene vor, so daß ABCDEGEHFA (Fig. 60) die söhlige Projection des ganzen Zuges, und des zutreibenden Stollns darstellt.

14. In der gebrochenen in sich zurückkehrenden Linie ABCDEFA sind durch den berechneten Zug alle Seiten ausser AF und EF gegeben.

15. Da ferner das Streichen von AF unmittelbar, und das Streichen der übrigen Sohlen aus dem Zuge bekannt ist, so lassen sich alle Winkel (§. 130, III. und IV. Zus.) berechnen, nur F nicht.

16. Man kann nun die beyden Seiten AF, EF aus §. 16 berechnen, und folglich

17. wieder wie Nr. 8 — 11 den Punct F' abgeben.

Zusatz: Würde statt dem Streichen des zutreibenden Stollns gefodert, daß solcher vom Tage aus nach dem kürzesten Weg seine Richtung erhalten sollte, so bleibt die nemliche I. Auflösung: nur müßte man Nr. 4 aus A auf die durch E gehenden Linien Perpendikel ziehen, und den kürzesten für AF nehmen; in der IIten Auflösung läßt sich wieder AF, und EF aus §. 16 angeben (Oppel §. 821).

Anmer:

Anmerkung: Wenn gleich äusserst selten eine Aufgabe unter allen den Bedingungen der vorhergehenden vorkömmt, so bleibt doch ihre Auflösung, wie Hr. v. Oppel erinnert, als Regulativ zur Auflösung anderer ähnlicher Aufgaben, immer sehr nützlich.

§. 179.

Aufgabe:

In einem seigern Schachte einen Punct F' abzugeben, wo angesessen werden muß, wenn von da aus ein Ort in einem andern gegebenen Puncte A durchschlägig gemacht werden soll (Oppel §. 820).

1. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis F' nach verlorner Schnur einen Zug, berechne ihn, und

2. verzeichne dessen Grundriß ABCDE (Fig. 61).

3. Nun ziehe man AE, so ist solche im verjüngten Maaße die söhlige Entfernung der Puncte A und F'; denn da E' sowohl als F' im seigern Schachte liegen, so fallen ihre Projectionen E und F, so wie ihre söhlige Entfernungen zusammen.

4. Man messe also AE, und berechne die treffende Rösche, und die ganze Seigerteufe von E', und bestimme

5. den Punct F' aus §. 178, Nr. 9 — 11, so wie aus §. 151, II. Zus. die Stunde, nach welcher der Ort von F' aus getrieben werden muß.

II. Auflösung:

6. Man verrichte nach verlohrner Schnur, und berechne den Zug von A bis E'.

7. Stellet nun die gebrochene Linie ABCDEA die söhlige Projection desselben vor, so fällt wieder die Projection von F' mit jener von E' zusammen, mithin

8. Stellt AE die söhlige Projection des zutreibenden Stollns vor, und hat mit ihm gleiches Streichen.

9. Nun sind aus dem berechneten Zugbuche alle Sohlen, und durch ihr Streichen aus §. 130, III. Zusatz alle Winkel, die sie einschließen, das heißt

10. von der gebrochenen Linie alle Seiten und Winkel ausser AE, nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben;

11. Man berechne sie aus §. 20.

12. Ferner suche man die auf AE treffende Rösche, und bestimme daraus F' (§. 178, Nr. 9 — 11).

13. Endlich aus dem Winkel E bestimme man das Streichen von EA (§. 130) oder des zutreibenden Stollns.

§. 180.

Aufgabe:

Ueber Tage von A nach einem andern gegebenen Puncte B, nach welchem man von A aus sehen kann, eine gerade Linie abzustecken.

Auflösung:

1. Man verfahre wie §. 188 Geomtr.

2. Befinden sich dazwischen solche Vertieffungen, daß die dahin geschlagenen Pflöcke von den übrigen nicht gedeckt werden, so wird

3. die Linie nach §. 121 abgesteckt.

§. 181.

Aufgabe:

Ueber Tage von einem gegebenen Puncte A aus, nach einem andern B, eine gerade Linie, oder vielmehr seigere Ebene abzustecken, wenn man von A den andern B nicht sehen kann, aber zwischen beyden eine Stelle D vorhanden ist, von welcher man ungehindert nach A und B visiren kann.

Auflösung:

Man verfahre nach der Anleitung des 194sten §. Geometrie.

§. 182.

§. 182.

Aufgabe:

Ueber Tage von einem gegebenen Puncte A aus, nach einen andern B, eine gerade Linie abzustecken, wenn man weder von A nach B, noch von einem dazwischen liegenden Puncte D nach beyden zugleich visiren kann.

I. Auflösung:

Man stecke die Linie entweder durch Hilfe eines Meßtisches (§. 211, Geom.) oder Astrolabes (§. 364, Trigonometrie) ab.

II. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis B einen Zug, und berechne ihn.

2. Verzeichne dessen Grundriß ACDEFB (Fig. 62).

3. Nun ziehe man im letztern AB, und bestimme das Streichen dieser Linie (§. 151, II. Zus.)

4. Steckt man endlich über Tag von A aus, unter eben diesem Streichen, eine Linie (§. 121), so liegt in ihr der Punct B (§. 151, I. Zusatz), folglich ist sie die verlangte.

III. Auflösung:

5. Man verrichte wieder von A bis B einen Zug, und berechne ihn.

6. Stellt man sich durch A eine söhlige Ebene, und auf ihr die Projection des Zuges ACDEFB (Fig. 62) vor, so ist

7. AB die söhlige Projection der abzugebenden Linie, und hat mit ihr gleiches Streichen.

8. Da nun vermittels des berechneten Zuges alle Winkel und Seiten der gebrochenen Linie, die Seite AB nebst den beyden anliegenden Winkeln ausgenommen, gegeben sind,

9. so berechne man solche (§. 20), und bestimme daraus das Streichen von AB.

10. Endlich gebe man über Tag von A aus unter diesem Streichen eine Linie ab (§. 121), so ist solche die verlangte.

Anmerkung: Man vergleiche Oppel §. 824.

§. 183.

Aufgabe:

Von zwey gegebenen Puncten A′, B′ werden in gegebenen Stunden Oerter getrieben; man sucht wo, und wie tief sie übereinander einkommen (Oppel §. 842).

I. Auflösung:

1. Man verrichte von A′ bis B′ einen Zug, und berechne ihn.

2. Verzeichne dessen Grundriß ADEFGB (Fig. 62).

3. Ziehe in diesem aus A und B unter dem gegebenen Streichen der zutreibenden Oerter die Linien Aα, Bβ, bis sie in dem Puncte C zusammenstoßen.

4. Nun messe man BC, und bestimme dafür die treffende Rösche b; eben so berechne man für AC die treffende Rösche a.

5. Ferner bestimme man für B′ die ganze Seigerteufe B′B.

6. Liegt nun B′ höher als A′, so ist B′B + b — a die Entfernung, um welche der von B′ getriebene Ort höher als der andere von A′ einkömmt;

7. liegt aber B′ tiefer, so ist B′B — b + a die Entfernung, um welche letzterer tiefer als der von A′ getriebene Ort einkömmt, so wie

8. AC und BC die Längen der zutreibenden Oerter angeben, bis sie übereinander einkommen.

II. Auflösung:

9. Man verrichte wieder von A′ bis B′ einen Zug, und berechne ihn.

10. Durch A′ stelle man sich eine söhlige Ebene vor, so daß ADEFGBCA die Projection dieses Zuges nebst den zu treibenden Oertern angiebt.

11. Von dieser gebrochenen Linie sind nun aus dem berechneten Zuge und den Bedingungen der Aufgabe alle Seiten und Winkel, auffer den beyden Seiten AC, BC, und dem eingeschlossenen Winkel C bekannt.

12. Man berechne sie aus §. 16, so hat man gefunden, wie weit die Oerter zu treiben sind, bis sie untereinander einkommen.

13. Um nun die Teufe zu finden, verfahre man wie Nr. 4 — 7.

Anmerkung: Bey der Auflösung wurde angenommen, daß die Sohlen der beyden Oerter von A' und B' gegen C steigen, fallen beyde, oder steiget die eine, und die andere fällt, so läßt sich leicht Nr. 6 und 7 die zweckmäßige Abänderung treffen.

III. Abschnitt.

Von der Lage der Gänge und der auf ihnen zutreibenden Oerter.

§. 184.

Voraussetzungen zur Bestimmung eines Ganges (Fig. 64).

2) Die Gränzen eines Ganges, das ist, die Saalbänder desselben Ab, Cd (§. 63) sind ebene Flächen, die

b) miteinander parallel laufen.

c) Die Gänge sind ihrer Teufe nach unbegränzt; sie setzen in ewige Teufen.

Anmerkung: Auf die Richtigkeit dieser Voraussetzungen stützet sich die Anwendung der Geometrie und Trigonometrie bey Bestimmung der Lage der Gänge. In der Erfahrung aber hat oft das Gegentheil statt: nicht selten bestehen die Gränzen aus mehrern gebrochenen Ebenen, oder auch krummen Flächen; die Saalbänder entfernen sich manchmal, dann kommen sie wieder einander näher, oder stoßen wohl gar zusammen. Die Gänge, sagt der Bergmann, haben nicht geschworen, in ihrer Stunde zu bleiben. Endlich die angenommene ewige Teufe stützet sich auf die vorhandenen Grubengebäude, die nicht über einige hundert Lachter tief sind. Allein dessen ungeachtet gewährt die Markscheidekunst noch immer Wahrscheinlichkeit, also noch wichtige Vortheile bey Untersuchung der Gänge.

I. **Zusatz:** Die beyden Saalbänder Ab, Cd eines Ganges haben einerley Streichen (§. 86, Zus.), und einerley Neigung (§. 67, V. Zus.)

II. Zusatz: Die innern oder dem Gange zugekehrten Winkel eEF, fFE der beyden Saalbänder Ab, Cd halten zusammen 180°; denn eEF = fFH (I. Zus.), und fFH + fFE = 180°.

III. Zusatz: Wenn der innere Winkel eEF vom Saalbande Ab spitzig, also der innere Winkel fFE des andern Saalbandes Cd stumpf ist, so ist Ab das Hangend, und Cd das Liegend des Ganges (§. 65, b).

IV. Zusatz: Da die beyden Saalbänder mit einer söhligen Ebene auf der einen Seite gleiche spitzige, und auf der andern gleiche stumpfe Neigungswinkel bilden, so kann von jedem Saalbande die eine Seite das Hangend, die andere das Liegend des Ganges vorstellen, so stellt das Saalband Ab mit seiner innern Seite, wo eEF spitzig ist, das Hangend, und mit seiner äussern Seite, wo eEG stumpf ist, das Liegend des Ganges vor, so wie man vom Saalbande Cd die innere Seite für das Liegend, und die äussere für das Hangend des Ganges nimmt.

V. Zusatz: Die söhlige Ebene MN wird von jedem Saalbande in zwey Theile getheilet, wovon der eine auf die Seite des Hangenden, der andere auf die Seite des Liegenden fällt, so sind z. B. für das Saalband Ab die Puncte M, G auf der Seite des Hangenden, und P, N auf der Seite

Liegenden, oder wie man sich manchmal kurz ausdrückt, erstere sind im Hangenden, und letztere im Liegenden des Ganges; hingegen für das Saalband Cd verhält es sich umgekehrt, da sind M, G im Liegenden, und P, N im Hangenden.

§. 185.

Erklärungen:

a) Das Streichen eines Saalbandes (§. 85, b) heißt das Streichen des Ganges, und

b) die Neigung eines Saalbandes, d. i. (Fig. 64) der spitzige Winkel eEF, oder fFH die Neigung oder das Fallen des Ganges.

I. Zusatz: Zieht man im Hangenden oder Liegenden eines Ganges eine söhlige Linie ab, so hat sie mit dem Gange einerley Streichen (§. 156, Zus.)

II. Zusatz: Durch das Streichen eines Ganges und die Neigung desselben ist für einen gegebenen Punct A die Lage des Ganges vollkommen bestimmt (§. 156).

III. Zusatz: Bleibt der Gang nicht in seiner Stunde, und hat er an verschiedenen Stellen eine verschiedene Neigung, so nimmt man zur Bestimmung dessen Hauptneigung und Hauptstreichen (§. 89).

§. 186.

§. 186.

Aufgabe: (Fig. 64.)

Das Streichen eines Ganges, welcher aufgefahren, und in seinem Liegenden entblößt ist, zu suchen (Oppel §. 609).

I. Auflösung:

1. Man ziehe im Liegenden die söhlige Linie AB, und bestimme mit dem Setzcompaß ihr Streichen, oder

2. man spanne zu AB die Schnur parallel, und gebe mit dem Hängcompaß das Streichen derselben an, so ist

3. in beyden Fällen das Streichen des Ganges gefunden (§. 185, I. Zus. und §. 86).

II. Auflösung:

4. Man ziehe wieder im Liegenden die söhlige Linie AB,

5. Nun verrichte man von einem Puncte C an, wo man den Hängcompaß noch brauchen darf, bis AB einen Zug, entweder

6. mit der Eisenscheibe, und bestimme das Streichen von AB (§. 113), oder

7. mit Schnüren (§. 132), und suche wieder das Streichen von AB (§. 131).

§. 187.

Lehrsatz: (Fig. 65)

Wenn man in einer donlägigen Ebene EM aus einem beliebigen Puncte A zwey gerade Linien AD, AE von gleicher Länge und Neigung nimmt, so ist die zwischen D und E gezogene gerade Linie söhlig.

Beweis:

1. Durch E lege man eine söhlige Ebene, und fälle aus A auf sie das Loth AI, ziehe EI, so ist letztere söhlig (§. 67), und AEI ist die Neigung von AE (§. 168, Geom.), ferner steht AI auf EI senkrecht (§. 162, Geometrie).

2. Durch D lege man ebenfalls eine söhlige Ebene, fälle aus A auf sie den Perpendikel Ai, ziehe Di, so ist wieder letztere söhlig, ADi der Neigungswinkel von AD, und Ai steht auf Di senkrecht.

3. Nun ist $\left.\begin{matrix} AD = AE \\ ADi = AEI \end{matrix}\right\}$ per hyp.

$AiD = 90° = AIE$, also $\triangle ADi \overset{s}{=} \triangle AEI$, folglich

4. $Ai = AI$; da nun ferner beyde Linien seiger sind, und den nemlichen Anfangspunct haben, so falleu sie in eine zusammen, so wie nun auch

5. Di von DI nicht verschieden ist.

6. Endlich steht AI auf der Ebene DIE senkrecht (§. 163, Geom.), also ist letztere söhlig (§. 67, IV. Zus.) folglich auch

7. die in ihr gezogene gerade Linie DE.

§. 188.

Aufgabe: (Fig. 65.)

Das Streichen eines Ganges, welcher aufgefahren, und in seinem Hangenden entblößt ist, zu finden (Oppel §. 609).

Auflösung:

1. Man spanne im Hangenden eine Schnur von beliebiger Richtung und Länge AD.

2. Nun bemerke man im Hangenden den Punct D, und suche mit dem Gradbogen die Neigung ADI.

3. Jetzt bewege man die Schnur von der nemlichen Länge AD in der Ebene des Hangenden so lange um A, bis sie in eine Lage AE kömmt, deren Neigung AEI = ADI ist.

4. Nun bemerke man wieder im Hangenden den Punct E, und ziehe die gerade Linie DE, so ist

5. diese Linie söhlig (§. 187), und hat mit dem Gange einerley Streichen (§. 185, I. Zusatz).

6. Man suche also das Streichen derselben (§. 186).

§. 189.

§. 189.

Aufgabe: (Fig. 64)

Das Streichen eines Ganges anzugeben, welcher überfahren, das heißt, mit dem Bau durchschnitten ist (Oppel §. 610).

Auflösung:

1. MN stelle einen Theil von der Sohle, und mn vom Firste eines Stollns,

2. Ab das eine, und Cd das andere Saalband des übersetzenden Ganges vor, so ist

3. ABbacdDC ein leerer körperlicher prismatischer Raum, wo man aber den Gang auf der einen Seite in AacC, und auf der andern in BbdD sehen kann.

4. Ferner ist AB eine söhlige Linie in dem einen, und CD in dem andern Saalbande; denn sie sind die Durchschnittslinien der Saalbänder mit der Sohle des Stollns, die man in dieser kleinen Strecke, der Rösche ungeachtet, für söhlig nehmen kann.

5. Da nun der Gang mit AB sowohl, als CD einerley Streichen hat (§. 185. I. Zusatz), so bestimme man

6. das Streichen einer von diesen beyden Linien (§. 186).

§. 190.

Aufgabe: (Fig. 65)

Ein Gang sey aufgefahren, und in seinem Liegenden entblößt, dessen Neigung abzugeben (Oppel §. 613).

Auflösung:

1. Man ziehe im Liegenden, vermittels einer Setzwage die söhlige Linie DE,

2. durch einen beliebigen Punct F derselben errichte man ferner im Hangenden den Perpendikel FA (§. 189, Geom.), so hat solcher

3. mit der Ebene des Hangenden (§. 169. III. Zus. Geometrie), folglich mit dem Gange selbst gleiche Neigung (§. 185).

4. Man spanne daher zu AF eine Schnur parallel, (§. 67, VI. Zus.) und suche

5. mit dem Gradbogen ihre Neigung.

§. 191.

Lehrsatz: (Fig. 65.)

Wenn auf einer schiefen Ebene EM, deren Neigung = x ist, aus einem beliebigen Puncte A zwey gerade, gleichlange Linien AD = AE = a so gezogen werden, daß sie mit einer söhligen Ebene gleiche Neigung

gung = β haben, sie selbst aber den Winkel DAE = d einschliessen, so ist:

$$\text{sin. } x = \frac{r \text{ . sin. } \beta}{\text{cos. } \frac{1}{2} d}$$

Beweis:

1. Man ziehe die gerade Linie DE, so ist sie söhlig (§. 187).

2. Durch DE lege man die söhlige Ebene BC, so ist ferner DE die Durchschnittslinie der beyden Ebenen.

3. Von A ziehe man in der schiefen Ebene auf DE den Perpendikel AF, und auf die söhlige Ebene BC das Loth AI, ferner die söhligen Linien DI, FI, EI, so sind

4. ADI = AEI = β (per hyp), und AFI = x.

5. Ferner EAF = DAF (§. 39, II. Zusatz, Geometrie) = $\frac{1}{2}$ d.

6. Die Dreyecke AFE, AIE, EFI, AIF sind rechtwinklicht (per constr.), mithin

7. ist im Dreyecke AFE:

AE : AF = r : cos. EAF (§. 323, Nr. II. Trigonometrie), oder

a : AF = r : cos. $\frac{1}{2}$ d, also

$$8.\ AF = \frac{a \text{ . cos. } \frac{1}{2} d}{r}.$$

9.

9. Ferner im rechtwinklichten Dreyecke AIE:

AE : AI = r : sin. AEI (§. 323, Nr. I, Trigonometrie), oder

a : AI = r : sin. β, mithin

$$10.\ AI = \frac{a \cdot \sin. \beta}{r}.$$

11. Im Dreyecke AIF

AF : AI = r : sin. AFI, mithin aus Nr. 8 und 10

$$\frac{a \cdot \cos. \frac{1}{2} d}{r} : \frac{a \cdot \sin. \beta}{r} = r : \sin. x, \text{ oder}$$

$\cos. \frac{1}{2} d : \sin. \beta = r : \sin. x$ (§. 216, Arithm.), folglich

$$12.\ \sin. x = \frac{r \cdot \sin. \beta}{\cos. \frac{1}{2} d}.$$

I. Zusatz: Wenn also der Winkel d, welchen die beyden gleichen Schenkel AD, AE einschliessen, nebst ihrem gleichen Neigungswinkel gegen die söhlige Ebene, oder β gegeben ist, so läßt sich daraus die Neigung x der schiefen Ebene berechnen.

II. Zusatz: Wenn z. B. $d = 75°12'$, also $\frac{1}{2} d = 37°36'$, und $\beta = 50°30'$, so wird

log. r . sin. β = 19,8874061

log. $\cos. \frac{1}{2} d$ = 9,8988840

---

also log. sin. x = 9,9885221

folglich,

folglich, da durch die Aufgabe der spitzige Neigungswinkel gesucht wird, $x = 76°53'$.

§. 192.

Aufgabe: (Fig. 41)

Aus der gegebenen Neigung und dem Streichen zweyer Donlagen CA, CB, den Winkel ACB, welchen sie einschließen, zu finden.

Auflösung:

1. Man stelle sich durch C eine söhlige, und durch CA, CB seigere Ebene vor, welche erstere in den söhligen Linien CH, CK schneiden.

2. Mit CA seyn in allen diesen drey Ebenen Kreise gezogen, so gehen die beyden seigern Kreise durch den Pol D des söhligen Kreises so, daß DH, DK Quadranten sind (§. 379, I. und V. Zus. sphär. Trigonometrie).

3. Ferner ist der Bogen KH das Maaß vom sphärischen Winkel D (§. 380, sphär. Trigonometrie), oder $KH = D$.

4. Zieht man noch in der Ebene ACB mit AC einen Kreis, so erhält man das schiefwinklichte Kugeldreyeck ABD.

5. Bezeichnet man mit den größern Buchstaben A, B, D die Winkel desselben, und mit den kleinern

a, b, d der Ordnung nach die diesen Winkeln entgegenstehenden Seiten, so läßt sich

6. aus dem Streichen der beyden Donlagen der söhlige Winkel HCK (§. 130, III. Zus.) = HK = D (Nr. 3) finden.

7. Setzt man die gegebene Neigung ACE = β, und BCK = α, so ist

8. b = DA = DH — AH = $90° - \beta$, und eben so a = DB = DK — BK = $90° - \alpha$ gegeben.

9. Nun läßt sich aus den beyden Seiten a, b, und dem eingeschlossenen Winkel D die dritte Seite d berechnen (§. 419, II. Tabelle, IV. Fall, Nr. 2, sphär. Trigonometrie).

10. Es ist aber d = AB = ACB, also der gesuchte Winkel, welchen die beyden Donlagen einschließen.

Zusatz: Wenn eine der beyden Donlagen söhlig ist, oder aber beyde fallen, oder die eine steigt, und die andere fällt, so lassen sich leicht Nr. 8 die nothwendigen Veränderungen wie in den §. 118 angeführten Zusätzen machen, so wie die gegenwärtige Aufgabe die umgekehrte der dort angeführten ist.

§. 193.

§. 193.

Aufgabe: (Fig. 65)

Ein Gang ist aufgefahren, und in seinem Hangenden entblößt, man soll seine Neigung abgeben.

Auflösung:

1. Man ziehe im Hangenden eine Schnur AD von beliebiger Länge.

2. Messe mit dem Gradbogen die Neigung derselben, oder ADI = β.

3. Darf man nun den Compaß brauchen, so bemerke man damit auch ihr Streichen γ.

4. Wo hingegen der Compaß wegen vorhandenem Eisen nicht gebraucht werden darf, messe man die Länge der Schnur AD = a, und bemerke im Hangenden den Punct D.

5. Nun bewege man die Schnur mit Beybehaltung der nämlichen Länge a im Hangenden um den Punct A, bis solche durch den Gradbogen wieder die Neigung AEI = β (Nr. 2) hat.

6. Mit dem Compaß nehme man wieder ihr Streichen δ ab, und berechne

7. den Winkel DAE = d (§. 192), oder

8. man bemerke, wenn man mit dem Compaß das Streichen nicht abnehmen darf, im Hangenden den Punct E, und messe DE.

9. Aus AD = AE, und DE bestimme man den Winkel DAE = d (§. 327, Trigonometrie).

10. Aus β (Nr. 2 und 5), und d kann man endlich die Neigung x vom Hangenden (§. 191), das ist, die gesuchte Neigung des Ganges berechnen.

§. 194.

Aufgabe: (Fig. 64).

Von einem Gange, welcher überfahren ist, seine Neigung abzugeben (Oppel (§. 615).

I. Auflösung:

1. Durch die Bedingung der Aufgabe entsteht wieder ein leerer prismatischer Körper, so wie §. 189, man bestimme also nach eben diesem § das Streichen der söhligen Durchschnittslinie AB.

2. In einem beliebigen Puncte E dieser Linie befestige man die Schnur, und fahre damit in der Linie ab, also in der Ebene des einen Salbandes so lange hin und her, bis sie in die Lage Ee kömmt, wo der Hängcompaß ein Streichen angiebt, welches vom vorhergehenden bey AB um 6 St., also um 90° verschieden ist.

3. Da nun die seigere Ebene durch eE auf AB senkrecht steht, so ist eEF die Neigung des Salbandes (§. 171, I. Zus. Geometrie), also die gesuchte des Ganges.

4. Man nehme also mit dem Gradbogen die Neigung von eE, so ist jene des Ganges gefunden.

II. Auflösung:

5. Man wähle sich in den beyden söhligen Durchschnittslinien ab, AB zwey beliebige Puncte e, r, und bestimme ihren Abstand er mit der Schnur.

6. Nun nehme man es = er, und theile rs bey E in zwey gleiche Theile, so steht.

7. eE auf AB (§. 39, Geometrie), also auch die seigere Ebene durch eE auf AB senkrecht, folglich hat eE mit dem Gange einerley Neigung, die man also

8. mit dem Gradbogen abnehmen kann.

§. 195.

Aufgabe: (Fig. 56)

Ein Gang streiche zu Tage in der donlägigen Linie CB aus, nun sey die Neigung und das Streichen dieser Linie, nebst dem Streichen des Ganges gegeben, man soll die Neigung des Ganges suchen (Oppel §. 618, I. Aufg).

Auflösung:

1. Durch C stelle man sich eine söhlige, und durch CB eine seigere Ebene vor, die einander in CH schneiden.

2. Ferner sey CA die söhlige Durchschnittslinie des Ganges (eines Saalbandes) mit obiger söhligen Ebene.

3. Nun beschreibe man mit dem Halbmesser CA in diesen drey Ebenen Kreise, so erhält man das rechtwinklichte sphärische Dreyeck AHB, wo

4. diese größern Buchstaben die Winkel bezeichnen, an deren Scheitel sie stehen, so wie die kleinern a, h, b der Ordnung nach ihre entgegenstehende Seiten.

5. Nebst dem rechten Winkel H ist durch die gegebene Neigung von BC der Winkel BCn = BH = a; durch das Streichen der Donlage und des Ganges, also der beyden Linien CH, CA der Winkel ACH (§. 130, III. Zusatz) = AH = b gegeben.

6. Nun ist:

r : sin. b = cot. a : cot. A (§. 393, Tab. I. Fall, Trig.), mithin cot. A = $\frac{\text{sin. b cot. a}}{\text{r}}$,

7. Es ist aber A = Bmn die gesuchte Neigung des Ganges.

§. 196.

Aufgabe: (Fig. 56).

Ein' Gang streiche in der donlägigen Linie CB zu Tage aus, nun sey die Neigung und das Streichen

dieser

dieser Linie, nebst der Neigung des Ganges gegeben; man soll das Streichen des Ganges abgeben (Oppel §. 618, II. Aufgabe).

Auflösung:

1. Wenn man wie im vorhergehenden § das rechtwinklichte sphärische Dreyeck construirt, so ist

2. nebst dem rechten Winkel H, aus der Neigung von BC der Winkel BCn = BH = a, ferner durch die Neigung des Ganges der Winkel Bmn = A gegeben.

3. Nun ist:

tang. A : tang. a = r : sin. b (§. 393, Tab. III. Fall, sphärische Trigonometrie), also sin. b $= \frac{\text{r . tang. a}}{\text{tang. A}}$.

4. Es ist aber b = AH = ACH, wo sich leicht allemal beurtheilen läßt, ob b spitzig oder stumpf ist.

5. Aus dem Winkel ACH, und dem Streichen von CB oder CH suche man endlich jenes von AC (§. 130), welches verlangt wird.

§. 197.

Aufgabe:

Man hat irgend auf einem ganz seiger fallenden Gange sein Hangendes und Liegendes ausgehauen und abge-

abgebauet, da setzt ein anderer unbetriebener und unaufgefahrner Gang über, der also bloß im Hangenden und Liegenden des seigern Ganges sichtbar ist, man soll die Neigung des übersetzenden Ganges abgeben (Oppel §. 619).

I. Auflösung:

1. Man stelle sich die beyden seigern Parallelebenen DGIH, EKOF (Fig. 66) als die Salbänder des seigern Ganges, und

2. die beyden schiefen Parallelebenen ACBK, MLNO als die Saalbänder des übersetzenden Ganges vor, so ist

3. wegen dem abgebauten seigern Gange der Raum ACBKONLM leer.

4. Um nun das Streichen sowohl als die Neigung der beyden Gänge zu bestimmen, reicht es zu von jedem Gange eines seiner Saalbänder zu beobachten, man nehme daher

5. vom seigern Gange das Saalband DGIH, und vom übersetzenden Gange das Saalband ACBK.

6. Diese Ebenen schneiden einander in der donlägigen Linie CB, welche in der seigern Ebene, das ist, im angebauten Gange sichtbar ist, und deren Neigung man also mit dem Gradbogen abnehmen kann.

7. Durch C stelle man sich eine söhlige Ebene vor, welche die seigere in CH, die schiefe Ebene aber in CA schneidet.

8. Nun nehme man mit dem Hängcompaß das Streichen von CB, oder was eines ist, von CH, ziehe mit der Schnur von C nach AK, also in der Ebene AB eine gerade Linie, und nehme ebenfalls mit dem Hängcompaß ihr Streichen, also jenes von CA;

9. aus dem Streichen der beyden söhligen Linien CH, CA berechne man den Winkel ACH (§. 130, III. Zusatz).

10. Nun beschreibe man aus C mit CA in obigen drey Ebenen (Nr. 7) Kreise, so erhält man das rechtwinklichte sphärische Dreyeck AHB (Fig. 56), wo wieder

11. diese größern Buchstaben die Winkel, und die kleinern a, h, b ihre opponirten Seiten bezeichnen.

12. In diesem Dreyecke ist ausser dem rechten Winkel H, die Seite $b = AH = ACH$ (Nr. 9), ferner die Seite $a = BH = BCH$ (Nr. 6) gegeben.

13. Nun ist

r : sin. b = cot. a : cot. A (§. 393, Tab. I. Fall, sphär. Trigon.), also $\cot. A = \frac{\sin. b \cot. a}{r}$

14.

14. Es ist aber A = Bmn; folglich die Neigung des übersetzenden Ganges.

II. Auflösung:

15. Man nehme mit dem Gradbogen die Neigung von BC ab (Nr. 6).

16. Suche den Winkel ACH vermittels Schnüre (§. 114).

17. Daraus berechne man die verlangte Neigung A nach Nr. 13; oder aber

18. man berechne Statt ACH den Winkel ACB = AB = h, so ist

19. sin. h : r = sin. a : sin. A (§. 393, Tab. II. Fall, sphärische Trigonometrie), mithin

$$\text{sin. A} = \frac{\text{r . sin. a}}{\text{sin. h}}$$

20. Ließe sich endlich die Neigung von BC (Nr 6 und 15) nicht abnehmen, so suche man

21. die beyden Winkel ACH = AH = b (Nr. 16), ACB = AB = h (Nr. 18), so ist:

22. cot. b : cot. h = r : cos. A (§. 393, Tab. II. Fall, sphärische Trigonometrie), also

$$\text{cos. A} = \frac{\text{r . cot. h}}{\text{cot. b.}}$$

23.

23. Folglich läßt sich die Neigung A des übersetzenden Ganges entweder aus Nr. 13 oder 19, oder endlich Nr. 22 abgeben.

§. 198.

Aufgabe: (Fig. 67).

In der Grube ist ein Gang bey F entblößt, und die Neigung sowohl, als das Streichen dieses Ganges gegeben, man soll sein Ausstreichen am Tage angeben, mithin zeigen, wo er zu erschärfen sey (Oppel §. 618, III. Aufgabe).

Auflösung:

1. Durch F, wo in der Grube der Gang entblößt ist, stelle man sich die söhlige Ebene BC vor, so ist

2. das Streichen der söhligen Durchschnittslinie DE aus jenem des Ganges gegeben.

3. Durch F stelle man sich in der Ebene des Ganges auf DE den Perpendikel FA bis an Tag bey A verlängert, und

4. aus A ein Loth AI auf die söhlige Ebene BC vor, so ist durch die Neigung des Ganges der Winkel AFI ebenfalls gegeben.

5. Durch A stelle man sich endlich die söhlige Ebene MN vor, welche den Gang in PO schneidet, so ist

6. PO jene Linie, in welcher der Gang zu Tage ausstreicht, und deren Lage man sucht.

7. Nun ist die Ebene MN ♯ BC (§. 67, VII. Zus.), also auch PO ♯ DE (§. 172, II. Zus. Geometr.), folglich hat PO mit DE gleiches Streichen (§. 86), mithin ist solches bekannt (Nr. 2).

8. Man bringe den Punct F an den Tag (§. 174), so, daß G dieser am Tag abgegebene Punct ist, und berechne die ganze Seigerteufe GF.

9. Stellt man sich ferner die geraden söhligen Linien GA, FI vor, so ist GF $\overset{=}{\#}$ AI (§. 172, V. Zus. Geom.), mithin AI bekannt.

10. Ferner GA $\overset{=}{\#}$ FI (§. 51, VII. Zusatz, Geom.)

11. Im rechtwinklichten AIF ist nun

$$FI : AI = r : \text{tang. AFI}, \text{ mithin}$$

$$FI = \frac{r \cdot AI}{\text{tang. AFI}}, \text{ wo aus Nr. 4 und 9}$$

alles gegeben ist.

12. Da endlich GA mit FI gleiches Streichen hat (§. 86) so ist solches von jenem des Ganges oder DE um 6 Stunden verschieden.

13. Man ziehe also am Tage durch G unter diesem Streichen die söhlige Linie GA = FI, und durch A gebe man wieder die söhlige Linie PO ab, welche

welche mit dem Gange einerley Streichen hat (Nr. 7), so ist

14. letztere die gesuchte Linie, in welcher der Gang zu Tage ausstreichet, wenn er immer seine Neigung behält, und in seiner Stunde bleibt (§. 184).

§. 199.

Aufgabe: (Fig. 68, 69, 70).

Man hat an einer Stelle A in der Grube das Streichen und die Neigung eines Ganges PQ abgenommen; an einer tiefern Stelle E des Gebirges findet man das Streichen und die Neigung eines Ganges GH den vorigen gleich; man soll nun bestimmen, ob letzterer Gang mit dem vorigen einer und der nemliche Gang sey, oder nicht (Oppel §. 875).

I. Auflösung:

1. Da die Gänge an beyden Stellen gleiches Streichen haben, so ist, wenn man durch A und E sich die söhligen Ebenen MN, BC vorstellt, OP # DG (§. 87).

2. Da ferner an beyden Stellen die beobachtete Neigung nach der nemlichen z. B. östlichen Seite zu liegt, so fallen entweder

3. die beyden Ebenen PQ, GH in eine GQ, wie Fig. 68 zusammen, oder

4. sie sind Parallelebenen, wie Fig. 69 und 70 (§. 176, Geometrie).

5. Von A sey auf die söhlige Ebene BC das Loth AI, und ferner die geraden Linien AE, EI gezogen, so ist für die Donlage AE das Loth AI die Seigerteufe, und EI die Sohle.

6. Man verrichte daher von E bis A einen Zug, lege solchen söhlig und seiger zu.

7. Aus dem Grundrisse suche man EI und den Winkel IEG (§. 151, I. und II. Zus.)

8. Aus dem Seigerrisse bestimme man AI (§. 153, II. Zusatz).

9. Noch stelle man sich die bey A beobachtete Ebene PQ verlängert vor, bis sie die söhlige Ebene BC in po schneidet, so ist

10. po ∦ PO (§. 172, II. Zusatz, Geometrie) ∦ GD (Nr. 1).

11. Aus A sey in dieser verlängerten Ebene PQ auf po der Perpendikel AF, und die söhlige Linie IF gezogen, so ist letztere auf po senkrecht (§. 166, III. Zus. Geom.), mithin ist

12. AFI die Neigung des Ganges (§. 169, III. Zus. Geometrie), welche man bey A und E aus der Beobachtung kennt.

13. Im rechtwinklichten Dreyecke AIF ist nun FI : AI = r : tang. AFI, also

$$FI = \frac{r \,.\, AI}{\text{tang. AFI}},$$ wo alles (Nr. 8 und 12) bekannt ist.

14. Von I sey in der söhligen Ebene BC auf DG der Perpendikel If gezogen, so ist im rechtwinklichten Dreyeck EfI

EI : fI = r : sin. IEf, mithin

$$fI = \frac{EI \,.\, \text{sin. IEf}}{r},$$ wo wieder alles aus Nr. 7 gegeben ist.

15. Der Perpendikel FI muß nun allemal, da er mit op zusammenstoßt, entweder selbst, oder verlängert die Linie DG schneiden (§. 45, II. Zus. Geometrie) und auf ihr senkrecht stehen;

16. Nun giebt es aber von I in der söhligen Ebene BC auf die Linie DG nur einen Perpendikel (§. 38, I. Zus. Geometrie), folglich fällt If (Nr. 14) mit IF in eine Linie zusammen, das heißt, die Puncte I, F, f liegen in einer geraden Linie.

17. Nun kann der Punct I in Hinsicht der beyden Puncte F, f zwey Lagen haben, denn er kann erstens zwischen F und f liegen, wie Fig. 70, das ist, das Loth AI liegt nicht auf jener Seite des Ganges, nach welcher der bey E beobachtete Gang GH zufällt.

18. Zweytens kann I so eine Lage haben, daß es nicht zwischen F und f fällt, wie Fig. 68 und 69; wo also das Loth AI auf jener Seite des Ganges liegt, nach welcher der bey E beobachtete Gang zufällt.

19. Im ersten Falle ist der Abstand der beyden Parallelen DG, op (Fig. 70), oder

$$Ff = fI + IF = \frac{EI \,.\, \text{sin. } IEf}{r} + \frac{r \,.\, AI}{\text{tang. } AFI}$$

(Nr. 13 und 14).

20. Im zweyten Falle aber ist eben dieser Abstand (Fig. 68 und 69), oder

$$Ff = fI - FI = \frac{EI \,.\, \text{sin. } IEf}{r} - \frac{r \,.\, AI}{\text{tang. } AFI}$$

21. Sollen nun die bey A und E beobachteten Gänge zusammen nur einen ausmachen, mithin PQ und GH in der nemlichen Ebene liegen, so muß op auf DG, also f auf F fallen, folglich kann nur die zweyte Lage oder Nr. 18 Statt haben.

22. Bey der ersten Lage sind es daher allemal zwey verschiedene parallel laufende Gänge.

23. Wenn aber auch bey der zweyten Lage beyde Gänge nur einen, wie Fig. 68, ausmachen sollen, so muß

24. $Ff = o$ seyn, mithin auch

EI

$$\frac{EI \cdot \text{sin. } IEf}{r} - \frac{r \cdot AI}{\text{tang. } AFI} = 0 \quad \text{(Nr. 20)},$$

also

$$\frac{EI \cdot \text{sin. } IEf}{r} = \frac{r \cdot AI}{\text{tang. } AFI}, \text{ folglich}$$

25. $$\text{sin. } IEf = \frac{r^2 \cdot AI}{EI \cdot \text{tang. } AFI}, \text{ und}$$

26. $$\text{tang. } AFI = \frac{r^2 \cdot AI}{EI \cdot \text{sin. } IEf}.$$

27. Wenn also bey der zweyten Lage eine dieser beyden Bedingungen (Nr. 25 und 26) Statt hat, da machen die beyA und E beobachteten Gänge, wenn sie ihre Neigung beybehalten, und in ihrer Stunde bleiben, zusammen nur einen aus, man berechne also aus Nr. 26 den Winkel AFI, und vergleiche solchen mit der beobachteten Neigung (Nr. 12), oder suche aus Nr. 25 den Winkel IEf = IEG, und vergleiche solchen mit dem Nr. 7 bestimmten.

II. Auflösung:

28. Man verrichte von E bis A einen Zug, und lege ihn zur leichtern Uebersicht söhlig zu.

29. Aus dem Zugbuche berechne man die ganze Seigerteufe AI.

30. Die söhlige Projection des Zuges bildet nun eine gebrochene Linie, in welcher, da I die Projection

von A ist, EI die letzte Seite ausmacht, und wodurch sie wieder nach E zurückkehrt.

31. Nun sind aus dem berechneten Zugbuche alle Seiten dieser Linie, EI ausgenommen, und durch das Streichen aus §. 130, IV. Zus. alle Winkel, ausser E und I, gegeben.

32. Man suche nun EI nebst diesen beyden anliegenden Winkeln (§. 20).

33. Aus dem gefundenen Winkel E oder I suche man das Streichen von EI (§. 130).

33. Da endlich aus dem Streichen des Ganges bey E das Streichen DG bekannt ist, so bestimme man

35. den Winkel IEG oder IEf.

36. Endlich berechne man wieder aus Nr. 25 den Winkel IEf, oder aus Nr. 26 den Winkel AFI, vergleiche erstern mit Nr. 35. und letztern mit der beobachteten Neigung, so entscheidet die Uebereinstimmung, daß der an beyden Stellen entdeckte Gang nur einer und der nemliche sey, unter den Bedingungen Nr. 27.

§. 200.

Erklärungen:

a) Wenn zwey Gänge zusammenkommen, und also einander durchschneiden, so sagt man: sie durchsetzen einander;

α) schneidet einer den andern rechtwinklicht; so geben sie einander das rechte Kreuz:

β) schneidet einer den andern unter einem schiefen Winkel, so schaaren sie sich zusammen.

b) Der Kürze wegen kann daher die Durchschnittslinie zweyer Gangsebenen, die Kreuzlinie heißen.

Anmerkung: Lempe nahm zuerst in seiner Markscheidekunst die Benennung Kreuzlinie an.

§. 201.

Aufgabe: (Fig. 71 und 72).

Von ein paar Gängen sind ihre Neigung und und Streichen gegeben, man sucht die Neigung und das Streichen ihrer Kreuzlinie (Oppel §. 618, IV. Aufgabe).

Auflösung:

1. Man stelle sich ACB als die Ebene des einen, und BCD als die Ebene des andern Ganges, mithin CB als die Kreuzlinie, und

2. Durch C eine söhlige Ebene vor, welche die Ebenen der beyden Gänge in CA und CD schneide.

3. Aus C beschreibe man mit dem Halbmesser CB in der söhligen Ebene sowohl, als in der Ebene eines jeden Ganges Kreise, so bilden sie das sphärische Dreyeck ABD.

4. Bezeichnet man mit diesen angeführten grösern Buchstaben die Winkel dieses Dreyeckes, und mit den kleinern Buchstaben a, b, d die entgegenstehenden Seiten der Ordnung nach; so ist

5. Durch die Neigung des Ganges ACB der Winkel A, durch die Neigung des Ganges BCD der Winkel D gegeben.

6. Ferner läßt sich aus dem Streichen der beyden Gänge, das ist, aus dem Streichen der beyden söhligen Linien CA, CD der eingeschlossene Winkel ACD angeben (§. 130, III. Zus.), mithin ist auch der Bogen AD als dessen Maaß, oder die die Seite b des Dreyeckes bekannt.

7. Durch die Kreuzlinie CB lege man eine seigere Ebene, welche die söhlige in CH schneidet, und beschreibe mit CB in dieser seigern Ebene den Kreisbogen BH; so ist

8. BH = BCH, mithin die gesuchte Neigung der Kreuzlinie, man setze nun BH = x.

9. Aus dem gegebenen Streichen des Ganges ACB, oder der Linie CA, und dem söhligen Winkel ACH = AH läßt sich das Streichen von CH (§. 130), also auch der Kreuzlinie CB als ihrer

Don-

Donlage angeben, man setze daher AH = y; ist folglich

10. x (Nr. 8) und y (Nr. 9) gefunden, so ist die Neigung und das Streichen der Kreuzlinie gefunden, also die Aufgabe aufgelöset.

11. Nun ist im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke AHB für den Halbmesser = 1:

1 : sin. AH = tang. A : tang. BH (§. 387, sphär. Trigonometrie), oder

1 : sin. y = tang. A : tang. x, mithin

tang. x = sin. y tang. A.

12. Im rechtwinklichten Dreyecke BHD ist eben so

1 : sin. DH = tang. D : tang. BH.

13. Fällt nun der Perpendikel BH oder x zwischen die beyden Bögen AB, BD wie Fig. 71, so ist DH = AD — AH = b — y, mithin Nr. 12.

1 : sin. (b — y) = tang. D : tang. x, also

tang. x = sin. (b — y) tang. D.

14. Fällt aber der Perpendikel BH oder x ausserhalb der beyden Bögen AB, BD wie Fig. 72, so ist DH = AH — AD = y — b, mithin Nr. 12

1 : sin. (y — b) = tang. D : tang. x, also

tang. x = sin. (y — b) tang. D.

15. Nun sind, den Bedingungen der Aufgabe zu Folge, die Neigungen der beyden Gänge bekannt, mithin

bekannt,

bekannt, ob sie auf verschiedene oder eine Seiten fallen.

16. Im ersten Falle sind die beyden Winkel A, D im sphärischen Dreyecke ABD spitzig, folglich fällt der Perpendikel BH zwischen die beyden Bögen wie Fig. 71. (§. 395, sphär. Trigonom.) Man suche daher

17. Aus den beyden Gleichungen Nr. 11 und 13 die eine unbekannte Größe, es ist nemlich:

sin. (b — y) tang. D = sin. y tang. A, oder

(sin. b cos. y — cos. b sin. y) tang. D = sin. y tang. A (§. 307, Trigonometrie).

sin. b cos. y tang. D = sin. y tang. A + cos. b x sin. y tang. D = sin. y (tang. A + cos b tang. D), also

$$\frac{\text{cos. y}}{\text{sin. y}} = \frac{\text{tang. A}}{\text{sin. b tang. D}} + \frac{\text{cos. b tang. D}}{\text{sin. b tang. D}},$$

folglich

18. $$\text{cot. y} = \frac{\text{tang. A}}{\text{sin. b tang. D}} + \text{cot. b} = \frac{\text{tang. A cot. D}}{\text{sin. b}} + \text{cot. b}$$ } §. 303. Trig.

19. Aus dem gefundenen y kann man endlich die andere unbekannte Größe x aus Nr. 11 suchen, folglich für den ersten Fall (Nr. 15) die Aufgabe auflösen (Nr. 10).

20. Fallen hingegen die beyden Gänge nach der nemlichen Seite zu, so ist von den Winkeln A, D des

sphäri-

sphärischen Dreyeckes ABD der eine A spitzig, und der andere D stumpf, mithin fällt der Perpendikel BH ausserhalb der Bögen AB, BD wie Fig. 72, und ist mit D ungleichartig, also spitzig, (§. 395, sphär. Trigonometrie). Man kann also wieder

21. aus den beyden Gleichungen Nr. 11 und 14, die eine unbekannte Größe y suchen, es ist nemlich

$$\text{sin. y tang. A} = \text{sin. (y — b) tang. D}$$
$$= \text{(sin. y cos. b — cos. y sin. b) x tang. D, also}$$
$$\text{cos. y sin. b tang. D} = \text{sin. y cos. b tang. D}$$
$$\text{— sin. y tang. A} = \text{sin. y (cos. b tang. D — tang A)}$$
$$\frac{\text{cos. y}}{\text{sin. y}} = \frac{\text{cos. b tang. D}}{\text{sin. b tang. D}} - \frac{\text{tang. A}}{\text{sin. b tang D}},$$

folglich

$$\text{cot. y} = \text{cot. b} - \frac{\text{tang. A}}{\text{sin. b tang. D}}$$
$$= \text{cot. b} - \frac{\text{tang. A cot. D}}{\text{sin. b}}.$$

22. Endlich läßt sich nun aus y die andere unbekannte Größe x vermittels der Gleichung Nr. 11 finden, folglich wieder die Aufgabe auflösen (Nr. 10).

23. Beyde Auflösungen stützen sich wieder auf die Voraussetzung, daß beyde Gänge ihre Neigungen beybehalten, und in ihrer Stunde bleiben (§. 184).

An-

Anmerkung: Die Gleichung Nr. 21 folgt auch unmittelbar aus Nr. 18, wenn man in letzterer cot. D oder tang. D, da D stumpf ist, negativ setzt.

I. Zusatz: Stellt die Ebene ACB die Oberfläche des Gebirges, BCD die Ebene eines Ganges vor, so läßt sich auf die nemliche Art aus der Neigung und dem Streichen des Ganges, ferner aus dem Streichen und der Neigung oder Ansteigen des Gebirges die Lage der Linie CB angeben, in welcher der Gang zu Tage ausstreichet. (Oppel §. 618, III. Aufg.)

II. Zusatz: Wenn das Streichen der beyden Gänge um 6 Stunden verschieden, also ACD = AD = b = 90° ist, so wird sin. b = 1, cot. b = 0, folglich, wenn sich beyde Gänge auf verschiedene Seiten neigen, cot. y = tang. A cot. D (Nr. 18), neigen sich aber beyde Gänge der nemlichen Seite zu, so wird Nr. 21 cot. y = — tang. A cot. D.

III. Zusatz: Wenn zwey Gänge auf verschiedene Seiten fallen, und gleiche Neigungen haben, so wird $y = \frac{1}{2} b$ (§. 404, Zus. sphär. Trigonometrie), mithin tang. x = fin. $\frac{1}{2}$ b tang. A (Nr. 11).

IV. Zusatz: Fallen aber die beyden Gänge nach einerley Seite zu, und haben gleiche Neigungen, so ist D = 180° — A (Fig. 72), also stumpf, mithin tang. D = — tang. A, folglich Nr. 21

cot.

$$\text{cot. } y = \frac{\text{cos. } b}{\text{sin } b} - \frac{1}{\text{sin. } b} = \frac{\text{cos. } b - 1}{\text{sin. } b}$$

$$= - \frac{1 - \text{cos. } b}{\text{sin. } b}.$$

Nun ist $1 - \text{cos. } b = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2} b^2$ (§. 308, IV. Zusatz, Trigonometrie); $\text{sin. } b = 2 \text{ sin. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } \frac{1}{2} b$ (§. 306, II. Zusatz, Trigonometrie), also

$$\text{cot. } y = - \frac{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} b^2}{2 \text{ sin. } \frac{1}{2} b \text{ cos. } \frac{1}{2} b} = - \frac{\text{sin. } \frac{1}{2} b}{\text{cos. } \frac{1}{2} b}$$

$$= - \text{ tang. } \tfrac{1}{2} b.$$

Da aber b nie gröſſer als 180° seyn kann (§. 382, I. Zus. sphär. Trigon.), mithin $\frac{1}{2} b$ allemal spitzig, also tang. $\frac{1}{2} b$ positiv seyn muß, so ist y stumpf (§. 303, I. Zus. Trigon.), folglich $y - \frac{1}{2} b = 90$ (§. 286, Trigonometrie), und $y = 90° + \frac{1}{2} b$.

V. Zusatz: Fände man für beyde Gänge gleiches Streichen, so ist CA ♯ CD, mithin ACD = AD = b = o, folglich, wenn die Gänge auf verschiedene Seiten fallen, wird Nr. 18 cot. $y = 2\infty$, das ist, $y = o$, und Nr. 11, tang $x = o$, mithin $x = o$, das heißt, die Kreuzlinie ist söhlig, und läuft mit obigen Linien parallel.

Fallen hingegen beyde Gänge nach der nemlichen Seite zu, so wird, da cot. D negativ ist, Nr. 21 cot. $y = 2\infty$, also $y = o$, mithin auch Nr. 11 tang. $x = o$, also $x = o$, folglich wie im ersten Falle.

VI.

VI. Zusatz: Es mögen die beyden Gänge nach verschiedenen Seiten, oder nach einer Seite zu fallen, so ist allemal sin. B : sin. A = sin. b : sin. a (§. 410. sphär. Trigon.), mithin $\sin. B = \frac{\sin. A \sin. b}{\sin. a}$;

und eben so

sin. B : sin. D = sin. b : sin. d,

also $\sin. B = \frac{\sin. D \cdot \sin. b}{\sin. d}$.

folglich läßt sich aus dem Streichen und der Neigung zweyer Gänge der Neigungswinkel B angeben, welchen sie gegeneinander machen, nur muß anderswoher gegeben seyn, ob solcher spitzig oder stumpf ist.

§. 202.

Beyspiele zur Uebung:

I. Aufgabe:

Zwey Gänge fallen (Fig. 71) nach verschiedenen Seiten zu, die Neigung des einen oder A = 50°12', jene des andern D = 70°23', ferner sey aus ihrem Streichen nach §. 130, III. Zus. der Winkel ACD = b = 63°45'; man soll die Neigung der Kreuzlinie CB, das ist, den Winkel BCH = BH = x, und den söhligen Winkel ACH = AH = y suchen.

Auflö-

Auflösung:

1. log. tang. A = 10,0792671 — 10
log. cot. D = 9,5519521 — 10
c. d. log. sin. b = 0,0472692 (§. 8, III. und IV. Zusatz)

$$\log. \frac{\text{tang. A cot. D}}{\text{sin. b}} = 0{,}6784884 - 1, \text{ mithin}$$

2. $$\frac{\text{tang. A cot. D}}{\text{sin. b}} = 0{,}4769670$$

cot. b = 0,4931454

mithin cot. y = 0,9701124 (§. 201, Nr. 18), folglich ist

3. der schlige Winkel ACH = y = 45°52′, woraus man das Streichen von CH, mithin der Kreuzlinie CB bestimmen kann (§. 130), wenn jenes der Gänge gegeben ist.

4. log. sin. y = 9,8559558 — 10
log. tang. A = 10.0792671 — 10

log. tang. x = 9,9352229 — 10 (§. 201, Nr. 11, also log. r tang. x = 9,9352229 (§. 8. IV. Zus.), mithin ist

5. die Neigung der Kreuzlinie, oder BCH = x = 40°45′.

II. Aufgabe:

Unter den Bedingungen der vorhergehenden Aufgabe y und x suchen, wenn beyde Gänge nach einer Seite zufallen (Fig. 72)

Auflösung:

6. $\cot. b = 0{,}4931454$

$$\frac{\text{tang. A cot. D}}{\text{sin. b}} = 0{,}4769670 \quad \left.\right\} \text{Nr. 2.}$$

$\cot. y = 0{,}0161784$ (§. 201, Nr. 21),

mithin

7. $y = 89°4'30''$

8. $\log. \sin. y = 9{,}9999434 - 10$

$\log. \text{tang. A} = 10{,}0792671 - 10$

$\log. r \text{ tang. } x = 9{,}0792105$, folglich

9. die Neigung der Kreuzlinie oder $x = 6°54'$.

1. Zusatz: Wenn alles, wie in der ersten Aufgabe bleibt, aber $b = 90°$ ist, so wird

$\log. \text{tang. A} = 10{,}0792671 - 10$

$\log. \cot. D = 9{,}5519521 - 10$

$\log. r \cot. y = 9{,}6312192$ (§. 201, II. Zus.),

mithin $y = 66°50'$.

Ferner $\log. \sin. y = 9{,}9634877 - 10$

$\log. \text{tang. A} = 10{,}0792671$

$\log. r \text{ tang. } x = 10{,}0427548$, folglich

$x = 47°49'$.

Unter den nemlichen Bedingungen wird hingegen in der zweyten Aufgabe

$\cot. y = -\text{tang. A cot. D}$ (§. 201, II. Zusatz),

folg:

folglich $y = 180° - 66°50' = 113°10'$, hingegen wieder $x = 47°49'$.

II. Zusatz: Fallen beyde Gänge nach verschiedenen Seiten unter einer Neigung $A = D = 50°12'$, und schließen CA, CD den schligen Winkel ACD $= AD = b = 63°44'$ (Fig. 71) ein, so ist

$y = \frac{1}{2} b$ (§. 201, III. Zus.) $= 31°52'$

ferner log. sin $\frac{1}{2} b =$ 9,7225881 — 10

log. tang. $A =$ 10,0792671 — 10

---

log. r tang. $x =$ 9,8018552,

folglich $x = 32°22'$.

III. Zusatz: Fallen hingegen beyde Gänge nach einer Seite zu, so wird unter den Bedingungen des vorhergehenden Zusatzes $D = 180° - A = 129°48'$;

$y = 90° + \frac{1}{2} b$ (§. 201, IV. Zus.) $= 121°52'$

und sin. y = sin. 58°8', mithin

log. sin. y = 9,9290504 — 10

log. tang. $A =$ 10,0792671 — 10

---

log. r . tang. $x =$ 10,0083175, also

$x = 45°33'$.

§. 203.

Aufgabe: (Fig. 71 und 72)

Aus dem Streichen zweyer Gänge, und aus der Lage ihrer Kreuzlinie CB die Neigung eines jeden

Gan-

Ganges, und die Winkel, welche ihre söhlige Durchschnittslinien mit der Kreuzlinie einschließen, zu finden

Auflösung:

1. Durch C lege man eine söhlige Ebene, welche die Ebenen der Gänge in CA, CD schneidet, und beschreibe aus C mit dem beliebigen Halbmesser CB Kreise, so erhält man wie §. 201 das sphärische Dreyeck ABD, wo wieder die grösstern Buchstaben die Winkel, und die kleinern a, b, d ihre opponirten Seiten ausdrücken.

2. Durch die Kreuzlinie CB lege man eine seigere Ebene, welche die söhlige in CH schneidet, und beschreibe in dieser Ebene aus C ebenfalls mit CB einen Kreis, oder den Bogen BH.

3. Vermöge der Bedingungen der Aufgabe ist das Streichen der beyden Gänge, mithin aus §. 130, III. Zusatz der söhlige Winkel ACD = AD = b bekannt.

4. Ferner läßt sich aus dem Streichen der Kreuzlinie CB oder ihrer Sohle CH, und aus dem Streichen von AC wieder der Winkel ACH = AH = y (§. 201, Nr. 4) angeben.

5. Endlich ist durch die Neigung der Kreuzlinie der Winkel BCH = BH = x (§. 201, Nr. 8) gegeben.

6.

6. Man soll nun erstlich die Neigung eines jeden Ganges, mithin die Winkel A, D; ferner die Winkel, welche die söhlige Durchschnittslinien CA, CD mit CB einschließen, also ACB = AB = d, und BCD = BD = a suchen.

7. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyecke ist nun für den Halbmesser = r

r : sin. AH = tang A : tang. BH (§. 387. sphär. Trigonometrie), oder

r : sin. y = tang. A : tang. x,

mithin $\text{tang. A} = \frac{\text{tang. x}}{\text{sin. y}}$.

8. Ferner in eben diesem Dreyecke

r : cos. AH = cos. BH : cos. AB (§. 389. sphär. Trigonom.), oder

r : cos. y = cos. x : cos. d, mithin

cos. d = cos. x . cos. y.

9. Eben so ist im rechtwinklichten Dreyecke BHD

r : sin. DH = tang. D : tang. BH.

10. Ferner r : cos. DH = cos. BH : cos. BD.

11. Wenn nun $y < b$ (Nr. 4), so fällt der Perpendikel BH = x zwischen die Ebenen der Gänge, mithin fallen die Gänge gegeneinander (Fig. 71), und DH = b — y, folglich erhält man aus Nr. 9

12. $r : \sin.(b - y) = \tang. D : \tang. x$, also

$$\tang. D = \frac{\tang. x}{\sin.(b - y)}$$

13. Aus Nr. 10 bekömmt man

$1 : \cos.(b - y) = \cos. x : \cos. a$, folglich

$\cos. a = \cos. x \cdot \cos.(b - y)$.

14. Wenn daher $y < b$, so ist aus Nr. 7, 8, 12, 13 die Aufgabe aufgelöst (Nr. 6).

15. Wenn hingegen $y > b$ (Nr. 4) gefunden wird, so fällt x (Fig. 72) ausserhalb der Gangesebenen, und liegt dem stumpfen Winkel D am nächsten, die Gänge fallen nach einer Seite zu, und $DH = y - b$.

16. Man erhält in diesem Falle aus Nr. 9

$1 : \sin.(y - b) = \tang. D : \tang. x$, also

$$\tang. D = \frac{\tang. x}{\sin.(y - b)}.$$

17. Ferner aus Nr. 10.

$1 : \cos.(y - b) = \cos. x : \cos. a$, also

$\cos. a = \cos. x \cdot \cos.(y - b)$.

18. Wenn also $y > b$, so ist ebenfalls aus Nr. 7, 8, 16 und 17 die Aufgabe aufgelöst (Nr. 6).

§. 204.

Aufgabe: (Fig. 56)

Auf einem Gange, dessen Streichen und Fallen gegeben ist, soll ein Ort mit bestimmter Rösche nach einer

einer gegebenen Weltgegend getrieben werden; man sucht das Streichen dieses Ortes (Oppel §. 790).

Auflösung:

1. Man stelle sich ACB als die Ebene des Ganges, PQ als die Richtung der Magnetlinie, endlich CB als die Sohle des in der Ebene des Ganges zu treibenden Ortes vor.

2. Aus der gegebenen Rösche berechne man den Winkel BCn (§. 160, I. Zus.)

3. Nun enthält die Aufgabe mit jener §. 159 die nemlichen Bedingungen, man löse sie daher nach der daselbst gegebenen Anleitung auf.

§. 205.

Aufgabe:

Von einem gegebenen Punct C wird auf einem Gange, dessen Streichen und Fallen gegeben ist, ein Ort nach einer gegebenen Weltgegend mit bestimmter Rösche getriebeu, man soll über Tag einen Punct F' abgeben, von welchem ein Schacht abzusinken ist, der seiger bis auf die Sohle des Ortes da niedergehen soll, wohin man mit dem Orte gelanget, wenn es in gegebener Weite aufgefahren ist (Oppel §. 810).

Auflösung:

1. Man suche das Streichen des zutreibenden Ortes nach §. 204.

2. Nun gebe man den Punct F' nach §. 172 ab.

§. 206.

Aufgabe:

Auf einem Gange, dessen Fallen und Streichen gegeben ist, wird ein Punct A angewiesen, man soll im Ausstreichen desselben einen Punct F′ abgeben, von welchem ein Stolln, auf dem Gange mit bestimmter Rösche getrieben, mit seiner Sohle in A einkömmt (Oppel §. 822).

Auflösung:

1. Man suche das Streichen des zu treibenden Ortes (§. 204).

2. Man nehme im Ausstreichen einen Punct E′, und verrichte von A bis E′ einen Zug nach verlohrner Schnur, und ziehe noch auf dem Ausstreichen einige Markscheiderwinkel.

3. Nun enthält die Aufgabe mit jener §. 178 die nemlichen Bedingungen, man verfahre also nach der daselbst gegebenen Anleitung.

§. 207.

Erklärungen: (Fig. 73)

a) Wenn ein Ort BE gegen einen Gang DO so getrieben wird, daß solcher zuerst in seinem Hangenden mit der Sohle des Ortes erbrochen werden muß, so sagt man: der Gang fällt dem Orte zu.

b)

b) Wird aber ein vorliegender Gang DO von einem Orte bE in seinem Liegenden zuerst vom Firste des Ortes erbrochen, so heißt es: der Gang entfällt dem Orte (Oppel §. 848).

Zusatz: Ist der Gang bey A entblößt, und man treibt von den tiefer liegenden Stellen B, b gegen den Gang Oerter, so wird der Gang vom Orte BE, dem er zufällt, eher, und vom Orte bE, dem er entfällt, späther getroffen, als wenn er seiger fällt; denn wäre der bey A entblößte Gang seiger, so würde er von beyden Oertern in I getroffen, nun aber wird er vom erstern Orte um EI früher, und vom andern um IE späther überfahren.

§. 208.

Aufgabe: (Fig. 73.)

An einer Stelle O ist ein Gang so entblößt, daß man sein Streichen und Fallen abnehmen kann, an einer tiefern Stelle B wird ein Ort in gegebener Stunde nach dem Gange, welcher dem Orte zufällt, getrieben, man soll die Länge des zu treibenden Ortes angeben, bis damit der Gang erbrochen wird (Oppel §. 850).

Auflösung:

1. Durch O sowohl als B stelle man sich söhlige Ebenen vor, welche die Ebene des Ganges in OP, und CD schneiden, so ist OP # CD (§. 172, II. Zusatz, Geometrie).

2. Durch OP stelle man sich ferner eine seigere Ebene vor, welche die söhlige Ebene durch B in op schneidet, so ist oP # op, mithin auch

3. CD # Op (§. 163, Zusatz, Geometrie).

4. Von B aus sey in der söhligen Ebene MN nach op eine gerade Linie in eben der Stunde gezogen, in welcher der Ort getrieben wird, so wird diese Linie, welche op in I schneidet, die dazwischen liegende Parallele CD, weil der Gang dem Orte zufällt, in E schneiden.

5. Durch I stelle man sich auf der söhligen Ebene MN einen Perpendikel vor, so liegt solcher ganz in der seigern Ebene durch OP (§. 170, IV. Zusatz, Geometrie), und schneidet letztere Linie in A (§. 45, II. Zus. Geom.)

6. Aus A endlich sey in der Ebene des Ganges auf CD der Perpendikel AF, und in der söhligen Ebene MN die Linie FI gezogen, so steht letztere auf CD senkrecht (§. 166, III. Zus. Geometrie), und AFI ist die Neigung des Ganges.

7. Nun verrichte man von B bis O einen Zug, und nehme bey O, wo der Gang entblößt ist, zugleich die Neigung und das Streichen des Ganges ab.

8. Lege den Zug söhlig zu, und ziehe im Grundrisse durch O (das ist jenen Punct, der eigentlich den Punct O vorstellt) eine gerade Linie, welche

mit

mit dem Gange, uud durch B eine andere Linie, die mit dem zutreibenden Orte gleiches Streichen hat, bis sie sich in I durchkreuzen; so erhält man die Länge von BI im verjüngten Maaße (§. 151, I. Zusatz).

9. Man kann aber auch BI berechnen, dann stellt man sich die söhlige Projection des Zuges von B bis O (Nr. 7), und dann von O durch A nach B zurück vor, so bildet sie eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie, von welcher aus dem berechneten Zugbuche alle Seiten, die Projectionen von OA nnd AB, das ist, oI und IB ausgenommen, gegeben sind; ferner da das Streichen von OI und BI, das ist, das Streichen des Ganges und des zutreibenden Ortes unmittelbar gegeben, und aus dem Zugbuche jenes aller übrigen Seiten bekannt ist, so kann man daraus alle Winkel angeben (§. 130, IV. Zusatz), folglich die Linie BI berechnen (§. 16).

10. Nun berechne man noch die ganze Seigerteufe von O = AI aus dem Zugbuche, so ist im rechtwinklichten Dreyecke AIF nebst dieser Seite der Winkel AFI gegeben (Nr. 6).

11. AI : IF = 1 : cot. AFI, also

FI = AI . cot. AFI.

12. Endlich suche man aus dem Streichen des Ganges und des zutreibenden Ortes den Winkel FEI.

13. Im rechtwinklichten Dreyecke EFI ist:

EI : FI = 1 : sin. FEI, mithin

EI

$$EI = \frac{FI}{\text{sin. FEI}} = \frac{AI \,.\, \text{cot. AFI}}{\text{sin. FEI}}$$

(Nr. 11), also

14. Die Länge des zutreibenden Ortes, im Falle solcher ganz söhlig seyn würde, oder

$$BE = BI - EI = BI - \frac{AI \,.\, \text{cot. AFI}}{\text{sin. FEI}};$$ wo alles aus Nr. 6, 8, 9, 10 und 12 bekannt ist.

15. Da aber die Sohle des Ortes eine Rösche haben muß, so stelle BG die ansteigende Sohle des zu treibenden Ortes vor.

16. Man berechne nun für die gegebene Wasserrösche den Winkel EBG (§. 160, I. Zusatz).

17. Nun liegt die Linie EG in der Ebene des Ganges, dessen Streichen und Neigung bekannt ist, ferner kennt man das Streichen dieser Linie, man kann also ihre Neigung GEI berechnen (§. 157, IV. Zusatz).

18. Aus GEI ist nun auch $BEG = 180^\circ - GEI$ gegeben; aus BEG und EBG (Nr. 16) läßt sich BGE finden.

19. Im stumpfwinklichten Dreyecke BEG ist endlich:

$BG : BE = \text{sin. BEG} : \text{sin. BGE}$, folglich

$$BG = \frac{BE \,.\, \text{sin. BEG}}{\text{sin. BGE}},$$

welches die gesuchte Weite des zutreibenden Ortes ist, wenn der Gang solchem zufällt.

I. Zusatz: Sollte von b aus der Ort, dem der Gang entfällt, getrieben werden, so bleibt die nemliche Auflösung, nur wird bE = bI + EI.

II. Zusatz: Sollte von B aus ein Ort, welchem der Gang zufällt, in der kürzesten Richtung nach dem Gange getrieben werden, sonst aber alles wie in der Aufgabe bleiben, so ist das Streichen des Ortes von jenem des Ganges um 6 St. verschieden, und E fällt nun auf F, mithin wird EI = FI; GEI = AFI, wodurch die Auflösung um vieles erleichtert wird (Oppel §. 853).

§. 209.

Aufgabe: (Fig. 67)

Von einem gegebenen Puncte G auf der Seite des Hangenden (§. 184, V. Zusatz) wird ein Schacht ganz seiger abgesunken, bis solcher auf den Gang trifft, man soll die Seigerteufe desselben angeben, wenn der Gang an irgend eine Stelle f so entblößt ist, daß man dessen Streichen und Fallen abnehmen kann. (Oppel §. 854.)

Auflösung:

1. Durch G stelle man sich die söhlige Ebene MN vor, welche die Gangesebene in OP schneidet.

2.

2. Durch G sey ferner auf die Ebene MN ein Perpendikel gezogen, welcher bey F auf den Gang trifft, so ist

3. Dieser Perpendikel GF die gesuchte Seigerteufe des Schachtes.

4. Durch F stelle man sich die söhlige Ebene BC, und durch f eine andere söhlige Ebene vor, welche den Gang in DE, po schneiden, so ist DE ∦ po ∦ PO (§. 172, II. Zus. Geom.)

5. Von G sey GA in der söhligen Ebene MN auf PO; aus A, in der Ebene des Ganges, AF auf DE; und endlich AI auf die söhlige Ebene BC senkrecht gezogen.

6. Die Linien GF, AI, AF werden die söhlige Ebene durch f in den Puncten g, a, f' ebenfalls schneiden (§. 151, III. Zus. Geometr.)

7. Nun setze man, f' falle mit f zusammen, und ziehe die seigere Linie fi und die söhligen Linien af, fg, IF, so liegen sie alle in der nemlichen seigern Ebene AIFG, und FI steht auf DE, so wie af auf po senkrecht; ferner ist Afa = AFI die Neigung des Ganges.

8. Nun ist AI $\overset{=}{\#}$ (§. 165 u. 172, V. Zus. Geom.), also auch GA $\overset{=}{\#}$ FI.

9. Eben so ist aI $\overset{=}{\#}$ fi $\overset{=}{\#}$ gF, folglich fa $\overset{=}{\#}$ iI; und gf $\overset{=}{\#}$ FI.

10. Man nehme nun bey f das Streichen und das Fallen des Ganges ab.

11. Verrichte von f bis G einen Zug, und lege ihn söhlig zu.

12. In diesem Grundrisse ziehe man durch f die Linie po unter dem gefundenen Streichen des Ganges, und errichte aus G auf po den Perpendikel gf, so ist im verjüngten Maaße gf = Fi (Nr. 9).

13. Im rechtwinklichten Dreyecke fiF ist nun:

Fi : fi = r : tang. fFi, also

$$fi = \frac{Fi \cdot \text{tang. } fFi}{r} = gF \text{ (Nr. 9)},$$ wo aus

Nr. 10 und 12 alles gegeben ist.

14. Nun berechne man ferner aus dem Zugbuche die ganze Seigerteufe von G oder Gg, so ist

15. die gesuchte Seigerteufe des seigern Schachtes

$$\text{oder } GF = Gg + gF = Gg + \frac{Fi \text{ tang. } fFi}{r}$$

(Nr. 13) gefunden.

16. Man kann auch gf = Fi (Nr. 12) berechnen; denn man stelle sich die söhlige Projection des Zuges, und der Linie fg vor, so erhält man eine gebrochene, in sich selbst zurückkehrende Linie vor, von der man aus dem Zuge alle Seiten, fg ausgenommen, kennt, und von der man aus §. 130 alle Winkel bestimmen kann; es läßt sich daher fg aus §. 20 berechnen.

I. Zusatz: Bey der Auflösung wurde zwar, um die Figur durch zu viele Linien nicht ganz unkenntlich zu machen, Nr. 7 angenommen, daß f in der Linie FA, mithin i in der Linie FI liege, welches doch selten oder gar nie der Fall seyn wird; allein diese Voraussetzung hat nicht den mindesten Einfluß auf die Richtigkeit der Auflösung; denn man setze f' sey Statt f die gegebene Stelle des Ganges, nun ziehe man aus f' auf die Ebene BC das Loth f'i', und auf DE in der Ebene des Ganges den Perpendikel f'F', ferner die söhlige Linie i'F'; so ist f'i' = fi (§. 172, V. Zus. Geom.) f'F'i' = fFi = der Neigung des Ganges, mithin △f'F'i' ≅ △fFi, mithin F'i' = Fi = gf (Nr. 9).

II. Zusatz: Läge f tiefer als F, wo also in der söhligen Zulage gf eine Richtung hat, welcher GA entgegen gesetzt ist, so wird am Ende GF = Gg — fi.

§. 210.

Aufgabe: (Fig. 67).

Man soll auf dem Ausstreichen eines Ganges einen Punct A angeben, wo angesessen werden muß, damit ein auf dem Gange getriebener Schacht in einem gegebenen tiefer liegenden Puncte F einkömmt (Oppel §. 860).

I. Auflösung:

1. Man nehme das Streichen des Ganges ab,

2. Bringe den Punct F über Tag (§. 174), das ist, man gebe am Tage den Punct G ab, der seiger über F liegt.

3. Aus G stecke man über Tag eine Linie unter einem Streichen ab, welches von jenem des Ganges um 6 Stunden verschieden ist, und verlängere sie, bis solche mit dem Ausstreichen OP des Ganges in A zusammenstosset, so ist

4. der Punct A der verlangte; denn

5. Die Richtung des Schachtes muß mit dem Gange gleiche Neigung, aber ein um 6 Stunden verschiedenes Streichen haben, und durch F gehen, nun unter diesen Bedingungen ist nur eine Linie möglich, und die zwischen dem abgegebenen Punct A und F gezogene thut allen Genüge.

II. Auflösung:

6. Man nehme das Streichen des Ganges ab.

7. Verrichte von F bis zum Ausgehenden des Ganges, z. B. P einen Zug nach verlorner Schnur, und ziehe auf jeder Seite von P in der Stunde, in welcher der Gang streicht, noch einige Markscheiderwinkel ab.

8. Nun lege man den ganzen Zug söhlig zu, und ziehe im Grundrisse von F eine Linie, welche dem Streichen des Ganges das rechte Winkelkreuz giebt, das ist, unter einem Streichen, welches von jenem des Ganges um 6 Stunden verschieden ist, bis sie mit einer bey P gezogenen in A zusammenstoßt.

9. Nun messe man PA.

10. Stellt man sich die söhlige Projection des Zuges bis zum bestimmenden Punct A vor, so bildet sie eine gebrochene Linie, von welcher man aus dem Zugbuche alle Seiten, ausser PA und FI weiß (I und A fallen in der Projection zusammen), ferner lassen sich aus dem gegebenen Streichen alle Winkel angeben, mithin kann man auch PA aus §. 16 berechnen.

11. Von P gebe man in der nemlichen Stunde, in welcher der Gang streichet, die söhlige Linie PA ab, so ist

12. A der verlangte Punct (Nr. 5).

1. Zusatz: Soll der Punct A nicht am Tage, sondern im Gebirge auf einer höhern Strecke abgegeben werden, von wo aus auf eine tiefere Stelle F der Schacht auf dem Gange abgesunken werden soll, so findet man den Punct A nach der II. Auflösung (Oppel §. 861).

II. Zusatz: Wenn der Gang über Tag nicht erschürft, oder wenn es ungewiß ist, ob der bey P am Tage entblößte Gang mit jenem bey F der nemliche sey, so nehme man das Fallen und Streichen des Ganges ab, bringe F bey G über Tag, und berechne die ganze Seigerteufe GF, nun verzeichne man einen rechten Winkel, trage auf dem einen Schenkel diese Linie auf, z. B. $\gamma\varphi$; an φ verzeichne man einen Winkel, welcher zur Neigung des Ganges das Complement ist, oder $\varphi = 90° - AFI = AFG$; verlängere nun den neu gezogenen Schenkel von φ, bis er mit dem andern Schenkel des rechten Winkels in α zusammentrifft, so ist $\gamma\alpha = GA$, wo man also wieder wie Nr. 3 den Punct A abgeben kann; — leichter läßt sich GA gleich berechnen, denn

$FG : AG = r : \text{tang. } AFG = r : \text{cot. } AFI$, also

$$AG = \frac{FG \cdot \text{cot. } AFI}{r}$$ (Oppel §. 862).

§. 211.

Aufgabe: (Fig. 67)

Man soll einen Punct G abgeben, von welchem aus, wenn ein seigerer Schacht abgesunken wird, man in gegebener Teufe GF auf einen gegebenen Gang trifft (Oppel §. 866).

Auflö-

Auflösung:

1. Man nehme im Hangenden des Ganges an einem beliebigen Puncte f das Streichen und Fallen desselben ab.

2. Verrichte von f bis nach h, wo man vermuthet, daß der gesuchte G nicht ferne sey, einen Zug mit verlorner Schnur.

3. Suche die Teufe des seigern Schachtes, welcher von h bis auf den Gang abgesunken werden kann (§. 209).

4. Diese Teufe ist nun Gg gleich (§. 172, V. Zus. Geom.), und $hG = fg$.

5. Man ziehe also diese Teufe Gg von der gegebenen GF ab, so ist $GF - Gg = gF$.

6. Nun ist im rechtwinklichten Dreyecke fgF:

$gF : gf = r : \text{tang. } gFf = r : \text{cot. } fFi$, also

$$gf = \frac{gF \,.\, \text{cot. } fFi}{r} = hG.$$

7. Nun stecke man aus dem angenommenen Puncte h eine söhlige Linie ab, welche ein Streichen hat, das von jenem des Ganges um 6 Stunden verschieden, und gf gleich ist, so, daß hG ihre Richtung nicht nach dem Ausstreichen des Ganges, z. B. gegen A zu, sondern davon abgekehrt hat.

I. Zusatz: In der Auflösung ist angenommen, daß der Punct h so eine Lage habe, daß $Gg < GF$ sey;

sey; fände man das Gegentheil, so wird (Nr. 5) Gg — GF = gF, und hG Nr. 7 wird gegen das Ausstreichen des Ganges zu abgegeben.

II. Zusatz: Soll der Punct k des seiger abzusinkenden Schachtes auf der Sohle eines Ortes hk, dem der Gang zufällt, abgegeben werden, so nehme man das Streichen des Ortes und Ganges nebst dem Fallen des letztern ab, und suche daraus den söhligen Winkel Gkh; nun ist im rechtwinklichten Dreyecke Fgf:

gF : gf = r : cot. fFi;

ferner gf = Gh; mithin

gF : Gh = r : cot. fFi; und im rechtwinklichten Dreyecke Gkh:

Gh : hk = sin. Gkh : r, mithin

gF : hk = sin. Gkh : cot. fFi, folglich

$$hk = \frac{gF \cdot \cot. fFi}{\sin. Gkh}.$$

Man gebe also von h aus auf der Sohle des Ortes die Linie kh ab (Oppel §. 867).

III. Zusatz: Ist der Gang bey A überfahren, und man soll in der Sohle des Ortes Ak den Punct k für den abzusinkenden seigern Schacht so abgeben, daß solcher in der Teufe GF auf den Gang trifft, so nehme man wieder das Streichen und Fallen des Ganges, und das Streichen des Ortes ab, und suche daraus den Winkel AkG. Nun ist:

im $\triangle$AFG; GF : AG = r : cot. AFI
im $\triangle$AGk; AG : Ak = sin. AkG : r, mithin

GF : Ak = sin. AkG : cot. AFI,

folglich

$$Ak = \frac{GF \cdot \text{cot. AFI}}{\text{sin. AkG}}$$

; man gebe also auf der Sohle des Ortes von A aus in dieser Entfernung nach der Seite des Hangenden zu den Punct k ab (Oppel §. 868).

§. 212.

Aufgabe: (Fig. 74)

Wenn in der Ebene eines Ganges ein Punct A angewiesen ist, von welchem ein Schacht auf diesem Gange abgesunken wird, und wenn ferner auf eben diesem Gange ein anderer Punct B gegeben ist, den söhligen Abstand dieser beyden Puncte A, B auf dem Gange, das ist, BF zu suchen (Oppel §. 869).

Auflösung:

1. Man nehme das Streichen des Ganges ab,
2. verrichte von B bis A einen Zug, und lege ihn söhlig zu.
3. Im Grundrisse ziehe man durch den Punct B eine gerade Linie, welche mit dem Gange einerley Streichen hat.

4. Aus A oder I (beyde Puncte fallen im Riß auf einander) ziehe man auf diese Linie einen Perpendikel IF, messe nun BF, ist solche

5. die auf dem Gange gesuchte söhlige Entfernung; denn

6. Wenn man im Grundrisse noch BI zieht, so ist offenbar der Triangel BIF desselben dem gegebenen ähnlich, und so wie BI die Größe dieser Linie im verjüngten Maaße angiebt, so giebt auch BF im Grundrisse den gesuchten Abstand.

II. Auflösung:

7. Man nehme das Streichen und Fallen des Ganges ab.

8. Verrichte von B bis A einen Zug.

9. Nun bildet die söhlige Projection dieses Zuges eine gebrochene Linie, in welcher, wenn man

10. OM zur Abscissenlinie, und B zu ihrem Anfangspuncte nimmt, die gesuchte Linie BF, die dem Puncte A oder vielmehr I entsprechende Abscisse oder Länge ist.

11. Da man nun aus dem Zugbuche alle Seiten, und vermittels §. 130 alle Winkel weiß, so läßt sich

12. die Länge BF aus §. 5, Nr. II. angeben.

Zusatz: Sollte nun von B aus auf dem Gange ein Ort BF' mit bestimmter Rösche bis zum Schachte AF getrieben werden, so bestimme man erst aus vorhergehender Auflösung BF, ferner den Winkel F'Bf (§. 160, I. Zus.), nun suche man das Streichen des Ortes (§. 159), und den Winkel FBf (§. 130. III. Zus.) ferner ist

im $\triangle$BFf; Bf : BF = r : cos. FBf

im $\triangle$BfF'; BF' : Bf = r : cos. F'Bf, mithin

$$BF' : BF = r^2 : \text{cos. FBf . cos. F'Bf},$$

$$\text{folglich } BF' = \frac{r^2 \cdot BF}{\text{cos. FBf . cos. F'Bf}} = \text{der}$$

Länge des zutreibenden Ortes, so wie man ferner sein Streichen weiß.

§. 213.

Aufgabe: (Fig. 72).

Wenn von einem gegebenen Puncte F auf einem Gange ACB nach seiner Donlage ein Schacht gesunken wird, anzugeben, wie tief er noch von F aus abzusinken ist, damit ein anderer übersetzender Gang BCD mit ihm ersunken wird (Oppel §. 874).

Auflösung:

1. CB stellet die Kreuzlinie der beyden Gänge, und CA, CD die söhligen Durchschnittslinien derselben mit der söhligen Ebene durch C vor.

2. Ferner sey FC in der Ebene des Ganges ACB auf CA senkrecht gezogen, so ist FC die Richtung und Länge des nach der Donlage des Ganges zutreibenden Schachtes, bis solcher auf den übersetzenden Gang einkömmt, mithin die gesuchte Größe.

3. Man nehme das Fallen und Streichen der beyden Gänge ab, und berechne daraus die Neigung und das Streichen der Kreuzlinie CB (§. 201).

4. Aus dem Streichen der Kreuzlinie CB, und dem Fallen und Streichen des Ganges ACB suche man den Winkel ACB (§. 157).

5. Daraus ergiebt sich nun BCF = ACF — ACB = 90° — ACB (Nr. 2), wenn CB steigt, und ACB spitzig ist; für den stumpfen Winkel ACB wird BCF = ACB — 90°; eben so läßt sich leicht für beyde Fälle der Winkel BCF angeben, wenn CB fällt.

6. Nun nehme man in der Kreuzlinie einen beliebigen Punct B, und verrichte von da aus bis F einen Zug.

7. lege solchen söhlig und seiger zu, und suche aus dem Standrisse die Neigung, das Streichen und die Größe der Donlage BF (§. 155).

8. Man kann aber auch letztere drey Stücke berechnen, denn in der söhligen Projection des Zuges sind alle Seiten, ausser der letzten, welche die

Sohle der Donlage BF ist, gegeben; ferner kann man aus dem Streichen alle Winkel, ausser den beyden anliegenden B und F, berechnen (§. 130); man suche daher die Sohle von BF, und die beyden Winkel (§. 20), ferner die ganze Seigerteufe von F (§. 143), aus diesen beyden Linien als Catheten des rechtwinklichten Dreyeckes kann man die Länge und Neigung der Hypothenuse BF, so wie man aus dem Winkel B das Streichen derselben angeben kann.

9. Aus der Neigung und dem Streichen der beyden Donlagen BC, BF suche man ferner den Winkel CBF, welchen sie einschließen (§. 192).

10. Nun ist im Dreyecke CBF

CF : BF = sin. CBF : sin. BCF, mithin

$$CF = \frac{BF \cdot \text{sin. CBF}}{\text{sin. BCF}} =$$ der gesuchten Länge des Schachtes, wo nun aus Nr. 5, 8, 9 alles bekannt ist.

§. 214.

Aufgabe: (Fig. 73).

Es sind an den Stellen B und A zwey verschiedene Gänge entblößt, man soll den Punct L angeben, in welchem sie in der Teufe B ihrem Streichen nach zusammen kommen (Oppel §. 879).

I. Auflösung:

1. Man nehme bey A und B die Neigung und das Streichen der beyden Gänge ab.

2. Von B bis A verrichte man einen Zug.

3. Durch B stelle man sich die söhlige Ebene MN vor, so sind CD, HK die Durchschnittslinien, deren Streichen gegeben ist (Nr. 1).

4. Stellet man sich ferner diese Linien verlängert vor, bis sie in L zusammenstoßen, so ist L der gesuchte Punct, wo die beyden Gänge in der Teufe B ihrem Streichen nach zusammenkommen.

5. Von A stelle man sich endlich auf die Ebene MN das Loth AI, in der Ebene des Ganges auf CD den Perpendikel AF, und in der söhligen Ebene IF vor, so ist

6. AFI die Neigung des Ganges bekannt (Nr. 1), und die ganze Seigerteufe von A = AI läßt sich aus dem Zugbuche berechnen.

7. Ferner ist im rechtwinklichten Dreyecke AIF:

$$FI : AI = r : \text{tang. AFI, mithin}$$

$$FI = \frac{r \cdot AI}{\text{tang. AFI}}, \text{ wo alles gegeben ist.}$$

8. Nun lege man den Zug söhlig zu, und ziehe im Grundrisse durch B eine Linie KH, welche mit dem bey B beobachteten Gange gleiches Streichen hat.

9. Eben so ziehe man durch A, oder, da A im Grundrisse mit I zusammenfällt, durch I ebenfalls eine gerade Linie op, welche mit dem bey A beobachteten Gange gleiches Streichen hat.

10. Durch I errichte man ferner auf op einen Perpendikel = IF (Nr. 7).

11. Durch F ziehe man endlich abermal zu op eine Parallele CD, und

12. verlängere KH, CD, bis sie in dem Puncte L zusammenstoßen, so giebt L den gesuchten Punct, mithin BL die söhlige Entfernung desselben von B auf letzterm Gange, denn

13. das im Grundrisse verzeichnete Dreyeck BLF hat mit jenem Nr. 4 bey B und F gleiche Winkel, ist ihm also ähnlich, so wie nun im Grundrisse BF im verjüngten Maaße die wahre Entfernung dieser Puncte angiebt, so stellt auch BL die Richtung und wahre Länge von der Linie BL Nr. 4 vor.

II. Auflösung:

14. Es sey alles wie in der vorhergehenden Auflösung von Nr. 1 — 7 einschlüssig.

15. Man stelle sich die söhlige Projection des Zuges und des Punctes F und L vor, so ist von der gebrochenen Linie alles, die beyden Seiten BL, LF und ihren eingeschlossenen Winkel L ausgenommen, gegeben, man kann daher die Entfernung BL berechnen (§. 16).

IV.

IV. Abschnitt.

Von der Bestimmung der Gränzen.

§. 215.

Erklärungen:

a) Wenn man sich auf beyden Seiten eines Ganges zwey Ebenen vorstellt, wovon jede von ihrem nächsten Saalbande um $3\frac{1}{2}$ Lachter entfernt mit solchem parallel läuft, so heißt der zwischen diesen Ebenen und den Saalbändern enthaltene Raum die Vierung des Ganges, und

b) die beyden Parallelebenen die Vierungsebenen desselben.

I. Zusatz: Die Vierungsebenen haben mit ihrem Gange gleiche Neigung und gleiches Streichen; denn die Neigung und das Streichen eines Ganges werden durch seine Saalbänder bestimmt (§. 185), nun sind aber diesen die Vierungsebenen parallel, folglich haben sie miteinander gleiche Neigung (§. 67, V. Zus.), und gleiches Streichen (§. 86, Zusatz).

II. Zusatz: Wenn man im hangenden Saalbande eines Ganges auf dessen Ebene einen Perpendikel von $3\frac{1}{2}$ Lachter Länge errichtet, und durch den Endespunct

despunct desselben mit dem Saalbande eine Parallelebene legt, so ist sie die eine Vierungsebene (§. 174, Zus. Geometrie). Eben so erhält man die andere Vierungsebene, wenn man auf die Ebene des Liegenden einen $3\frac{1}{2}$ Lachter langen Perpendikel errichtet, und durch seinen Endespunct mit dem Saalbande eine Parallelebene leget.

§. 216.

Erklärungen:

a) Das Recht, die zwischen den Saalbändern und den Vierungsebenen gelegenen Erze wegzunehmen, heißt die **Vierungsgerechtigkeit.**

b) Das Recht hingegen, bey einem Stolln $\frac{5}{4}$ Lachter von der Wasserseige über sich in den First, und $\frac{1}{2}$ Lachter in die Weite, die Erze wegzunehmen, heißt der **Stollnhieb.**

Anmerkung: Vermöge der churfürstlichen Verordnung für Baiern, die obere Pfalz und Leuchtenberg vom Jahre 1784:

I. Kömmt jedem belehnten Gange, der unstreitig als solcher anerkannt ist, die Vierungsgerechtigkeit zu (59 Artikel).

II. Wenn ein belehnter Gang in die Vierung eines andern belehnten Ganges fällt, so kömmt dem ältern Gange, wenn er sein Alter vom Vater

her

her mit offenen Durchschlägen bergüblich beweisen kann, die Vierungsgerechtigkeit zu (61 Artikel).

III. Jeder Erbstolln, das ist, jeder Stolln, welcher 10 Lachter, und eine Spann vom Rasen aus, mit seiner Wasserseige einbringt, hat im unverliehenen Felde die Vierungsgerechtigkeit, im verliehenen Felde aber den Stollnhieb (67 und 77 Artikel.)

§. 217.

Erklärung: (Fig. 76.)

Wenn ein jüngerer Gang CM in die Vierung eines ältern Ganges CN kömmt, mithin der erstere Gang von einer der beyden Vierungsebenen des zweyten oder ältern Ganges in der geraden Linie bc durchschnitten wird, so kann man diese Linie, oder bc die **Vierungslinie** heißen.

Anmerkung: Lempe bediente sich in seiner Markscheidekunst zuerst, nach Hn. Bergmeister Scheidhauer, dieser Benennung.

I. **Zusatz:** Die Vierungslinie bc ist mit der Kreuzlinie der beyden Gänge, oder mit BC, parallel, denn beyde sind die Durchschnittslinien der Vierungsebene und eines Saalbandes, also zweyer Parallelebenen mit dem Saalbande des jüngern Ganges (§. 172, II. Zus. Geometrie).

II. Zusatz: Die Vierungslinie hat mit der Kreuzlinie gleiche Neigung (§. 67, VI. Zus.), und gleiches Streichen (§. 88).

III. Zusatz: Jeder Punct der Vierungslinie, z. B. I ist vom nächsten Saalbande um $3\frac{1}{2}$ Lachter entfernt; denn I liegt in der Vierungsebene, welche allenthalben diese Entfernung hat (§. 215).

§. 218.

Aufgabe: (Fig. 75)

Wenn ein älterer Gang CN mit einem jüngern Gange CM gleiches Streichen hat, und sowohl dieses Streichen, als die Neigungen der beyden Gänge gegeben sind, die Entfernung der Vierungslinie bc von der Kreuzlinie BC auf der Ebene des jüngern Ganges anzugeben.

Auflösung:

1. Da beyde Gänge gleiches Streichen haben, so ist ihre Kreuzlinie BC söhlig (§. 201, V. Zusatz), mithin ist sie

2. zugleich die Durchschnittslinie der beyden Gänge mit der durch C gelegten söhligen Ebene PO.

3. Durch den beliebigen Punct F der Kreuzlinie sey in der Ebene des jüngern Ganges der Perpendikel FI bis an die Vierungslinie bc gezogen, so ist FI die gesuchte Entfernung.

4. Von I sey ferner auf die Ebene des ältern Ganges der Perpendikel IA, und in letzterer Ebene die die gerade Linie AF gezogen, so ist

5. das Loth AI = $3\frac{1}{2}$ Lachter (§. 217, III Zus.), die Linie AF steht auf der Kreuzlinie BC senkrecht (§. 166, III. Zusatz, Geom), also

6. der Winkel AFI der Neigungswinkel der beyden Gänge miteinander.

7. Aus A und I stelle man sich noch auf die söhlige Ebene PO die Lothe Ai', Ii, und in letzterer Ebene die geraden Linien i'F, iF vor, so stehen sie wieder auf BC senkrecht.

8. AFi', IFi sind die Neigungen der beyden Gänge, und

9. Auf die Ebenen dieser beyden Winkel sowohl als von AFI steht BC durch den Punct F senkrecht, folglich liegen sie alle in der nemlichen seigern Ebene (§. 162, II. Zusatz, Geometrie).

10. Für jeden Fall läßt sich daher aus den beyden Neigungen der Gänge der Neigungswinkel der Gänge unter sich oder AFI angeben; denn fallen beyde Gänge, wie in der Figur angenommen ist, nach einer Seite zu, und ist die Neigung des ältern Ganges größer, so ist AFI = AFi' — IFi.

11. Im rechtwinklichten Dreyecke FAI ist nun

FI : AI = r : sin. AFI, mithin

$$FI = \frac{AI \cdot r}{\text{sin. AFI}} = \frac{3{,}5 \times r}{\text{sin. AFI}} \text{ Lachtr (Nr. 5).}$$

I. Zusatz: Jeder Punct des jüngern Ganges, dessen Entfernung von der Kreuzlinie größer als FI ist, liegt ausserhalb der Vierung, und bey einer kleinern Entfernung innerhalb derselben.

II. Zusatz: Im rechtwinklichten Dreyecke FiI ist

FI : Fi = r : cos. IFi, mithin

$$Fi = \frac{FI \cdot \text{cos. IFi}}{r} = 3{,}5 \times \frac{\text{cos. IFi}}{\text{sin. AFI}}$$

(Nr. 11), das ist, aus den Neigungen der beyden Gänge, wenn sie gleiches Streichen haben, läßt sich die söhlige Entfernung der Vierungslinie von der Kreuzlinie angeben.

III. Zusatz: Stellt man sich durch die Vierungslinie bc eine seigere Ebene, welche die söhlige PO schneidet, mithin die Projection der Vierungslinie bc vor, so hat sie mit bc, also auch mit der Kreuzlinie BC gleiches Streichen, folglich ist sie mit ihr parallel (§. 87), und geht überdieß durch den Punct i. Verzeichnet man daher im söhligen Risse eines Zuges durch einen beliebigen Punct F der Kreuzlinie BC auf ihr einen Perpendikel = Fi im verjüngten Maaße, und zieht durch i mit BC eine Parallele, so stellt letztere im söhligen Risse die Vierungslinie bc vor (§. 148).

§. 219.

Aufgabe: (Fig. 76)

Aus der gegebenen Neigung und dem Streichen des ältern Ganges CN sowohl, als des jüngern CM, auf dem jüngern Gange den Abstand der Vierungslinie bc von der Kreuzlinie BC anzugeben, wenn beyde Gänge verschiedenes Streichen haben.

Auflösung:

1. Man stelle sich durch einen beliebigen Punkt F der Kreuzlinie BC in der Ebene des jüngern Ganges bis an die Vierungslinie bc einen Perpendikel FI auf der Kreuzlinie vor, so ist

2. FI der gesuchte Abstand der Kreuzlinie und Vierungslinie auf der Ebene des jüngern Ganges.

3. Von I sey ferner auf die Ebene des ältern Ganges der Perpendikel IA, und im ältern Gange die Linie AF gezogen, so ist

4. IA = 3,5 Lachter (§. 217, III. Zusatz), AF steht auf BC senkrecht (§. 166, III. Zusatz, Geometrie), mithin ist AFI die Neigung beyder Gänge gegeneinander.

5. Man berechne nun den Winkel AFI aus §. 201, VI. Zusatz.

6. Im rechtwinklichten Dreyecke FAI ist:

FI : AI = r : sin. AFI, mithin

$$FI = \frac{AI \cdot r}{\sin. AFI} = \frac{3{,}5 \times r}{\sin. AFI} \text{ Lachtr.}$$

I. Zusatz: Jeder Punct des jüngern Ganges, welcher der Kreuzlinie näher als FI liegt, fällt in die Vierung, und jeder weiter entfernte ausser derselben.

II. Zusatz: Durch F stelle man sich eine söhlige Ebene vor, welche die Vierungslinie bc in c schneidet; so ist die gerade Linie Fc söhlig, und liegt in der Ebene des jüngern Ganges. Man berechne nun aus der Neigung und dem Streichen der beyden Gänge die Neigung und das Streichen der Kreuzlinie (§. 201), und aus diesen den Winkel cFC (§. 203) = FcI (§. 217, I. Zusatz). Nun ist im rechtwinklichten Dreyecke cIF:

Fc : FI = r : sin. FcI, mithin

$$Fc = \frac{FI \cdot r}{\sin. FcI} = 3{,}5 \times \frac{r^2}{\sin. AFI \cdot \sin. FcI}$$

(Nr. 6), folglich läßt sich aus der Neigung und dem Streichen der Gänge der Abstand der Vierungslinie von der Kreuzlinie in der söhligen Ebene durch F angeben.

III. Zusatz: Legt man durch F eine söhlige Ebene, und zieht an den Punct c, in welchem sie die Vierungslinie schneidet, die gerade Linie Fc. so hat sie mit dem jüngern Gange einerley Streichen; denn

Fc liegt in der Ebene des jüngern Ganges, und zugleich in der söhligen Ebene durch F (§. 185, I. Zusatz).

IV. Zusatz: Stellt man sich durch die Kreuzlinie BC, und Vierungslinie bc, seigere Ebenen vor, so haben ihre Durchschnittslinien mit der söhligen Ebene durch F, das ist, ihre söhlige Projectionen gleiches Streichen, sind daher einander parallel, und die Projection von BC geht durch F, und jene von bc durch c. Verzeichnet man daher in dem söhligen Risse eines Zuges durch den Punct F eine Linie BC, welche mit der Kreuzlinie gleiches Streichen hat, trägt ferner durch F im verjüngten Maaße die Linie Fc (II. Zus.) unter dem Streichen des jüngern Ganges auf (III. Zusatz), zieht endlich durch c mit BC eine Parallele bc, so stellt letztere die Vierungslinie im Grundrisse vor.

§. 220.

Aufgabe:

Von einem ältern Gange CN sowohl, als dem jüngern CM ist die Neigung und das Streichen gegeben; man soll, für einen gegebenen Punct F der Kreuzlinie BC, die Vierungslinie im Grundrisse verzeichnen.

I. Auflösung: Wenn beyde Gänge gleiches Streichen haben (Fig. 75).

1. Die Kreuzlinie hat als söhlige Linie (§. 201, V. Zus.) mit den beyden Gängen einerley Streichen (§. 185, I. Zus.)

2. Nun berechne man aus §. 218, II. Zusatz den söhligen Abstand Fi der Vierungslinie bc;

3. Ziehe im Grundrisse durch den gegebenen Punct F eine gerade Linie BC, welche mit den Gängen, also auch ihrer Kreuzlinie, einerley Streichen hat.

4. Durch F errichte man auf BC im verjüngten Maaße einen Perpendikel = Fi.

5. Durch i ziehe man zu BC eine Parallele bc, so ist letztere die Vierungslinie (§. 218, III. Zus.)

II. Auflösung: Wenn beyde Gänge ein verschiedenes Streichen haben (Fig. 76).

6. Man suche das Streichen der Kreuzlinie (§. 201).

7. Ferner den Abstand der Vierungslinie von der Kreuzlinie auf der söhligen Ebene durch F, oder Fc (§. 219, II. Zus.)

8. Nun ziehe man im Grundrisse durch F eine gerade Linie BC, die mit der Kreuzlinie (Nr. 6) gleiches Streichen hat.

9. Ferner trage man durch F die Linie Fc (Nr. 7) im verjüngten Maaße unter dem Streichen des jüngern Ganges auf (§. 219, III. Zus.)

10. Endlich ziehe man durch c mit BC die Parallele bc, so stellt letztere die Kreuzlinie im Grundrisse vor (S. 219, IV. Zusatz).

§. 221.

Erklärungen:

a) Der söhlige Flächenraum, worinn eine Person oder Gesellschaft (eine Gewerkschaft) Befugniß erhalten hat, Bergwerk zu bauen, heißt ein **verliehenes Feld.**

b) Die Gränzen eines verliehenen Feldes über Tag abstecken, heißt solches **vermessen,** oder **verschnüren.**

c) Die am Tage gesetzten Gränzsteine nennt man **Mark-** oder **Lochsteine,** und diese Steine setzen, heißt das verliehene Feld **verlochsteinen.**

d) Die üblichen Maaße bey Verleihung eines Feldes sind **Fundgruben** und **Maaße,** deren Größe nicht nur an verschiedenen Orten, sondern auch bey verschiedenen Lagerstätten verschieden ist.

e) Der Punct, wo das Anhalten der Fundgrube zu nehmen ist, von wo aus also die Größe derselben bestimmt wird, heißt der **Fund.**

§. 222.

Bestimmung der Fundgrube und Maaßen auf Gängen für Baiern nach dem 18ten Artikel der bairischen Bergordnung:

a) Die Fundgrube sowohl als die Maaßen werden ihrer Länge nach in der Richtung des Hauptstreichens des Ganges (§. 185, III. Zus.) abgegeben, oder wie es heißt, auf Gängen wird streichendes Feld verliehen.

b) Eine Fundgrube hält ihrer Länge nach 3 Wehren, jede Wehre 2 Lehen, jedes Lehen 7 Berglachter, ein Berglachter $6\frac{3}{4}$ bairische Fuß, mithin ist die Länge der Fundgrube

= 3 Wehr = 6 Lehen = 42 Lachter

= 283,5 bairische Fuß.

c) Der Fund wird allemal in der Mitte des Rundbaumes von jenem Schachte genommen, wo zuerst Kübel und Seil eingeworfen wurde; wenn aber ein Bau mit einem Erbstolln angefangen würde, so ist der Fund da zu nehmen, wo der Gang an der Wasserseige des Stollns zuerst augenscheinlich zu erkennen ist; im erstern Falle wird die Hälfte der Länge also 21 Lachter auf der einen Seite, oder bergaufwärts, die andere Hälfte auf der andern Seite des Fundes, oder bergabwärts aufgetragen; im zweyten Falle aber wird die ganze Länge bergaufwärts genommen.

d) Die Länge einer Maaße ist = 2 Wehren = 4 Lehen = 28 Lachtr = 189 bair. Fuß; ferner werden an jeder Seite der Fundgrube die Maaßen angehängt, und erhalten auf der obern Seite der Fundgrube sowohl, als untern Seite von ihrer Entfernung die Benennung z. B. erste obere Maaße, wenn sie auf der obern Seite der Fundgrube zunächst liegt, u. s. f.

e) Die Breite bey streichendem Felde besteht aus der Mächtigkeit des Ganges und der Vierung (§. 215), mithin hält die Breite einer Fundgrube oder Maaße nebst der Mächtigkeit des Ganges 7 Lachter, nemlich auf jeder Seite vom Saalbande weg $3\frac{1}{2}$ Lachter.

f) die Tiefe des streichenden Feldes ist mit jener des Ganges einerley, das ist, es erstreckt sich in ewige Teufe (§. 184, c).

Anmerkung: In Freyberg hält eine Fundgrube 60, und eine Maaße 40 Lachter. Im Obererzgebirge, auf dem Harz, und zu Joachimsthal hingegen ist die Fundgrube 42, und die Maaße 28 Lachter lang.

I. Zusatz: Wenn die beyden Ebenen AB, MN (Fig. 66) ihre Neigung nach jener Seite zu haben, nach welcher ein Gang fällt, und wenn diese Neigung, und das Streichen dieser Ebenen mit der

Hauptneigung und dem Hauptstreichen des Ganges (§. 89) einerley, ferner ihre Entfernung von einander so groß, als die Mächtigkeit des Ganges nebst seiner Vierung, und AC = ML = 42 Lachter ist, so stellt der zwischen diesen beyden donlägigen Ebenen AB, MN und den beyden durch CL, AM gelegten seigern Ebenen enthaltene Raum die Fundgrube vor, nur müssen sich noch diese Ebenen in ewige Teufe erstrecken.

II. Zusatz: Wenn von einem Gange seine Mächtigkeit, seine Hauptneigung und Hauptstreichen nebst dem Funde a gegeben ist, so ist dadurch die Fundgrube vollkommen bestimmt, denn durch die Mächtigkeit, Hauptneigung und Hauptstreichen sind die Lage der beyden Ebenen AB, MN und durch das Gesetz (Erklär. a — c) ist für den Fund a die Lage der beyden seigern Ebenen durch CL und AM, folglich alle Gränzen der Fundgrube vollkommen bestimmt.

III. Zusatz: Stellt man sich über Tage durch den Fund a eine söhlige Ebene, und eben so eine andere EH durch einen Punct A in der Grube vor, so ist der durch diese beyden söhligen Ebenen begränzte Theil der Fundgrube ein Parallelepipedum (§. 259. Geom.)

IV. Zusatz: Zieht man vom Funde a aus auf die söhlige Ebene durch A die gerade Linie af, deren Neigung afi = der Hauptneigung des Ganges,

und deren Streichen von dem Hauptstreichen des Ganges um 6 Stunden oder 90° verschieden ist, so hat der Punct f in Rücksicht der Ebenen, welche die Fundgrube begränzen, die nemliche Lage, wie der Fund a selbst.

§. 223.

Aufgabe: (Fig. 77.)

Von einem Gange ist dessen Hauptstreichen, und der Fund A gegeben, man soll die Fundgrube vermessen.

Auflösung:

1. Man stecke über Tag vom Funde A aus unter dem Hauptstreichen des Ganges zu beyden Seiten die geraden Linien AE, AD ab (§. 121).

2. Von A aus nehme man in dieser Richtung die söhligen Linien AB = AC = 21 Lachter (§. 222, c).

3. In B und C setze man Lochsteine.

4. Ist aber der Fund A auf einem Erbstolln, so trägt man auf AE die ganze Länge von 42 Lachter söhlig auf, und setzt bey E einen Lochstein,

1. Zusatz: Wenn man sich durch A eine söhlige Ebene vorstellt, so stellen FG, HI die Durchschnittslinien dieser Ebene mit den beyden Saalbändern, und

eben

eben so KL, MN die Durchschnittlinien mit den beyden Vierungsebenen vor.

II. Zusatz: Trägt man auf der untern Seite der durch den Fund gezogenen Linie AD von B aus die söhlige Länge BD = 28 Lachter auf, und setzt wieder in D einen Lochstein, so ist die erste untere Maaße vermessen; und auf die nemliche Art die erste obere Maaße, wenn man auf der obern Seite die söhlige Linie CE = 28 Lachter nimmt, und in E einen Lochstein setzet.

III. Zusatz: Wenn (Fig. 66) in der Grube auf der söhligen Ebene durch A der Punct f gegeben ist, so daß die nach dem Funde a gezogene gerade Linie af die Bestimmungen (§. 222, IV. Zus.) hat, so lassen sich die Gränzen auf der söhligen Ebene durch A eben so abgeben, wie über Tag durch den Fund a; oder f kann als Anhaltungspunct des Vermessens dienen.

§. 224.

Bestimmung der Fundgruben und Maaßen auf Flötzen, mächtig schwebenden oder liegenden Gängen und Stockwerken für Baiern und die obere Pfalz, nach dem 19ten Artikel der Bergordnung:

a) Das Feld wird hier nach söhligen rechtwinklichten Parallelogrammen abgegeben, und geviertes Feld genannt.

b)

b) Die Fundgrube hält nach ihrer Länge sowohl, als Breite 28 Lachter, mithin ihr Flächeninhalt 784 Quadratlachter.

c) Die Maaße ist 14 Lachter lang, und 28 Lachter breit, also ihr Flächeninhalt 392 Quadratlachter.

d) Das Feld geht wieder in ewige Teufe.

e) Der Fund wird in der Mitte des Rundbaumes vom Erbschacht genommen, wo zuerst der Finder Kübel und Seil eingeworfen hat; an jeder Seite des Fundes wird die halbe Länge = 14 Lachter, und eben so auf jeder Seite die Hälfte ihrer Breite aufgetragen, so daß der Fund mitten in das Quadrat zu liegen kömmt; die Maaßen werden nach Belieben an die Länge oder Breite der Fundgrube angelegt.

I. Zusatz: Beym gevierten Felde werden wenigstens in die Ecke, mithin wenigstens 4 Lochsteine gesetzt; es wird mit 4 Lochsteinen beraint.

II. Zusatz: Stellt man sich durch die 4 Seiten des söhligen Quadrates abcd (Fig. 64), von welchen jede 28 Lachter lang ist, seigere Ebenen bis in ewige Teufe vor, so schließen sie den Raum einer Fundgrube des verliehenen gevierten Feldes ein.

III. Zusatz: Wenn durch den Fund K am Tage sowohl, als durch einen beliebigen Punct A in der Grube söhlige Ebenen gelegt werden, so ist der von ihnen begränzte Theil der Fundgrube ein senkrechtes Parallelepipedum

IV. Zusatz: Durch den Fund K und die gegebene Lage für die Länge ist die Fundgrube vollkommen bestimmt.

V. Zusatz: Stellt man sich durch den Fund K eine seigere Linie vor, welche die söhlige Ebene durch A in I schneidet, so hat I in Rücksicht der Ebenen, welche die Fundgrube begränzen, die nemliche Lage, wie der Fund K.

§. 225.

Aufgabe: (Fig. 78).

Die Fundgrube, deren Richtung und Fund A gegeben sind, auf einem Flötze über Tag abzustecken.

Auflösung:

1. Durch den Fund A stecke man auf jeder Seite in der gegebenen Richtung gerade Linien AE, AD ab (§. 121).

2. Nun nehme man von A aus die söhligen Entfernungen AB, AC auf obigen Linien, jede = 14 Lachter.

3. Durch B, C stecke man ferner die Linien FH, GI in einem Streichen ab, welches um 6 St. von dem Streichen der Linie BC verschieden ist.

4. Jetzt nehme man auf diesen Richtungen die söhligen Linien BF, BH, CG, CI, jede = 14 Lachter, und

5. Setze an den Stellen F, G, H, I Lochsteine (§. 224, I. Zusatz).

I. Zusatz: Zieht man die söhlige Diagonal HG, so ist $HG^2 = 2HI^2$ (§. 145, Zusatz, Geometrie); mithin $HG = HI\sqrt{2} = 28 \times \sqrt{2} = 39{,}592$ Lachter; wenn man daher diese Diagonal mißt, so kann man dadurch die gesetzten Lochsteine prüfen.

II. Zusatz: Nimmt man die söhlige Länge BD = 14 Lachter, und zieht durch D in einem Streichen, welches um 6 St. von dem Streichen der Linie BD verschieden ist, die Linie KM, nimmt die söhligen Linien DK, DM jede 14 Lachter, setzt noch in K, M Lochsteine, so ist eine Maaße vermessen, welche an der Fundgrube liegt.

III. Zusatz: Wenn es die Umstände nicht erlauben, dem abzusteckenden Felde die Figur eines Quadrates bey der Fundgrube, oder eines Rechteckes bey den Maaßen zu geben, so kann man dafür eine andere söhlige Figur abgeben, wenn nur ihr Flächeninhalt im ersten Falle 784, und im zweyten

392 Quadratlachter hält, wozu das I. Hauptstück des II. Theils der Geometrie die zweckmäßige Anleitung giebt.

§. 226.

Aufgabe:

Auf einem Gange ist der Fund A gegeben, man soll die Fundgrube söhlig und seiger zulegen, das ist, man soll im Grund = und Seigerrisse die Theile des Grubengebäudes angeben, welche in die Fundgrube fallen.

Auflösung:

1. Man ziehe den auf diesem Gange verführten Bau ab.

2. Lege solchen söhlig zu, und

3. bestimme das Hauptstreichen des Ganges (§. 185. III. Zusatz).

4. Nun ziehe man die Horizontallinie (§. 154) in diesem Hauptstreichen, und verfertige den Seigerriß.

5. Durch den Punct A, oder den Fund ziehe man im söhligen Risse eine gerade Linie im Hauptstreichen des Ganges.

6. Auf jeder Seite derselben trage man im verjüngten Maaße die Länge der halben Fundgrube oder AB = AC = 21 Lachter auf, und ziehe

7. Durch B und C Perpendikel bis zum Seigerrisse fort.

8. Die zwischen diesen Perpendikeln liegenden Gebäude fallen in die Fundgrube.

I. Zusatz: Auf ähnliche Art lassen sich die Maaßen in Grundriß legen.

II. Zusatz: Für geviertes Feld lassen sich eben so im Standrisse jene Theile angeben, welche vom Grubengebäude in die Fundgrube, und jede Maaße fallen.

§. 227.

Bestimmung der Fundgruben und Maaßen auf Seifenwerken für Baiern vnd die obere Pfalz nach dem 20sten Artikel der Bergordnung:

a) Die Fundgrube und Maaßen werden im gevierten Felde abgegeben.

b) Eine Fundgrube und die beyden nächsten Maaßen halten in der Länge 100, und in der Breite 50 Lachter, mithin an Flächeninhalt 5000 Quadratlachter.

c) Die Tiefe geht nur so weit, als das Seifenwerk.

Zusatz: Fundgruben abzustecken und zuzulegen, läßt sich aus den vorhergehenden Anleitungen für Flötze leicht bewerkstelligen.

§. 228.

§. 228.

Erklärungen:

a) Bey einem Gange in der Grube auf einer söhligen Ebene durch A (Fig. 66) einen Punct f so abgeben, daß die vom Funde a nach f gezogene gerade Linie eine Neigung hat, welche mit der Hauptneigung des Ganges einerley ist, und deren Streichen vom Hauptstreichen des Ganges um 6 Stunden verschieden ist, heißt den Fund auf die söhlige Ebene durch A fällen.

b) Giebt man auf der Ebene durch A einen Punct C so ab, daß die vom Lochsteine B nach C gezogene gerade Linie die eben angeführte Neigung, und das nemliche Streichen hat, wie af, so wird der Lochstein B auf die söhlige Ebene durch A gefällt.

c) Wird hingegen für die in der Grube gegebene Markscheiderstuffe C bey einem Gange am Tag ein Punct B so abgegeben, daß BC die für af angeführte Neigung und Streichen hat, so wird die Markscheiderstuffe über Tag gebracht.

Zusatz: Beym gevierten Felde liegt f unter a, und C seiger unter B, mithin wird a sowohl als B nach §. 174 in die Grube gefällt, so wie umgekehrt f sowohl als C nach eben dieser Anleitung über Tag gebracht werden.

§. 229.

Aufgabe: (Fig. 66)

Den über Tage gegebenen Fund a bey streichendem Felde auf eine söhlige Ebene durch den gegebenen Punct A in die Grube zu fällen.

I. Auflösung:

1. Man verrichte von A bis a einen Zug, und lege solchen söhlig zu.

2. Durch A ziehe man im Grundrisse in dem Hauptstreichen des Ganges die Linie AC;

3. aus a oder i (beyde Puncte fallen im Grundrisse zusammen) ziehe man auf AC den Perpendikel ie.

4. Von e aus nehme man ef der halben Mächtigkeit des Ganges gleich, so stellt f den gesuchten Punct im Grundrisse vor (§. 228, a).

5. Man messe daher Ae, und trage sie durch A in dem Hauptstreichen des Ganges auf.

6. Durch e gebe man ef oder die halbe Mächtigkeit des Ganges in einem Streichen ab, welches vom vorigen um 6 St, verschieden ist, so ist f der verlangte Punct.

II. Auflösung:

7. Man verrichte von A bis an den Fund a einen Zug.

8. Nun ist im Dreyecke aif aus diesem Zuge die Seigerteufe ai, ferner der Winkel afi = der Haupt-Neigung des Ganges gegeben.

9. Ferner: fi : ai = r : tang. afi, also

$$fi = \frac{ai \cdot r}{\text{tang. afi}}$$ bekannt; ferner ef der halben Mächtigkeit des Ganges gleich, folglich ist nun auch ei = ef + fi gegeben.

10. Von A nach i stelle man sich eine gerade Linie Ai, also die söhlige Projection der Donlage Aa vor, so bildet sie mit der Projection des verrichteten Zuges die letzte Seite der in sich selbst zurückkehrenden gebrochenen Linie, von der man

11. aus dem Zugbuche alle Seiten, Ai ausgenommen, und vermittels §. 130 alle Winkel, die beyden anliegenden A und i ausgenommen, weiß.

12. Man berechne also die Seite Ai (§. 20).

13. Im rechtwinklichten Dreyecke Aei suche man nun aus den gegebenen Seiten ei, Ai (Nr. 9 und 12) die dritte Seite Ae (§. 325, Trigon.)

14. Aus A gebe man im Hauptstreichen des Ganges die söhlige Linie Ae ab.

15. Durch e stecke man eine andere söhlige Linie ab, deren Streichen vom Hauptstreichen des Ganges um 6 St. oder 90° verschieden ist, und

16. nehme auf ihr ef der halben Mächtigkeit des Ganges gleich, so ist f der gesuchte Punct.

Zusatz: In beyden Auflösungen wurde A im hangenden Saalbande angenommen, läge der gegebene Punct in der Grube, wie z. B. M im liegenden Saalbande, so bleibt die erste Auflösung unverändert, nur muß dann Nr. 4 der Perpendikel um die halbe Mächtigkeit des Ganges verlängert werden, das ist, if = ie + ef genommen werden. In der zweyten Auflösung wird daher ei = fi — fe (Nr. 9), alles übrige bleibt, wenn man in die Stelle A, e die Buchstaben M, e schreibt.

§. 230.

Aufgabe: (Fig. 67)

Die Markscheiderstuffe F über Tag zu bringen.

Auflösung:

1. Man bringe die Oertung F bey G über Tag (§. 174).

2. Wenn nun A den gesuchten Punct über Tag vorstellt, so ist AFI aus der Hauptneigung des Ganges, so wie die Seigerteufe AI = GF durch den Zug gegeben.

3. Ferner im rechtwinklichten Dreyecke AGF:
GF : GA = r : tang. AFG = r : cot, AFI, also

$$GA = \frac{GF \cdot \cot. AFI}{r},$$ wo alles bekannt ist.

4. Nun gebe man am Tage von G aus eine söhlige Linie ab, welche in einer Stunde streicht, welche von der Stunde des Hauptstreichens des Ganges um 6 St. verschieden ist, und

5. nehme auf ihr, nach jener Seite zu, nach welcher der Gang sich neigt, GA (Nr. 3), so ist A der verlangte Punct am Tage (228. c).

Zusatz: Sollte man umgekehrt den Lochstein A bey streichendem Felde auf die söhlige Ebene BC in der Grube fällen, so geschieht die Auflös. aus §. 229.

Verbesserungen der Druckfehler vom I. Theile oder Arithmetik.

Seite	Zeile	statt	lies
14	15	als Inbegriff	nicht als Inbegriff.
135	5	Quadrat	Cubus
148	26	$\sqrt{3}$	$\sqrt[3]{3}$
155	17	II. Zus.	I. Zus.
156	1	$\frac{m.(m-1)}{1.2} e^2$	$\frac{m.(m+1)}{1.2} e^2$
—	2	$\frac{m.(m-1)(m-2)}{1.2.3} e^3$	$\frac{m.(m+1)(m+2)}{1.2.3} e^3$
157	13	$= m +$	$= m \times$
161	19	$1.2.3.n^2$	$1.2.3.$
164	7	$234\ q^5$	$243\ q^5$
166	11	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{68}$
191	4	mx	m
196	10 bis 13	y^2 soll allemal	y stehen
229	3	$cx^2 d + x^3$	$cx^2 + dx^3$
287	16	$yx - y$	$y(x - y)$
318	8	0,77..	0,87..
325	27	48 mit N	24 mit N
401	1	$dx + max^{m-1} d^2x$	$; dx^2 + mx^{m-1} d^2x$
440	14	$\left(\frac{a-x}{a+x}\right)$	$\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$
VIII. Tab. 17		$(1+k+n+mp)$	$(1+k+m+mp)$

Von

Vom II. Theile oder Geometrie und Trigonometrie.

Seite	Zeile	statt	lies
4	2	den	raden
61	15	n. $180° - \frac{360°}{2}$	n. $180° - 360°$
103	14	BD	BC
118	16	BF	DF
—	18	ABF	ADF
119	5	Viereck	Vieleck
125	22	AFD	AFB
126	26	D : P = p : d	D : P = d : p
139	9	DBE	DBF
166	16	△ABG	ABG
179	2	CH	EH
180	21	DEE	DEF
182	2	§. 145.	§. 45
191	7	$\frac{1}{30}$ EF	$\frac{1}{10}$ EF
192	16	KI	KL
206	14	Nr. 8.	Nr. 9.
286	24	A,b	B,b
298	10	CH	Ch
304	19	prism. B. A.	prism. = B. A
310	2	Diameters	Cylinders
316	10	de	de. 2
329	20	AHBQF	AHBQR
344	1	$(\alpha + \beta)$	sin. $(\alpha + \beta)$
346	14	$(\gamma - \alpha)$	sin. $(\gamma - \alpha)$
350	3	$\left(\frac{s}{s+1}\right)$ — sin. α^2	$\left(\frac{s}{s+1}\right)$ — sin. α^3
—	6	cos. α sin. 2 α.	cos. α. 2 sin. α

Seite	Zeile	statt	lies:
352	10	cos. α. cos. β	cos. α. sin. β
—	11	— sin. α cos. α cos. β	— sin. α. cos. α sin. β
355	12	(Lehrs. II.)	(Lehrs. II.) =
369	23	C — A =	C — A :
378	7	§. 224.	§. 324.
401	6	α — 6 R	α = 6 R
437	15	$\frac{1}{1}$ c	$\frac{1}{2}$ c
438	4	0,0008	0,008
—	11	70	76
—	12	31	33
445	21	AEFCA	AEFBA
446	4	AEBQA	APBQA
447	7	KDLOA	KDLOK
452	23	180°	90°
453	14	Fig. 317.	Fig. 217.
455	6	sin. BH	sin. BH =
456	3	sin m Cn tang.	sin. m Cn = tang.
458	10	AB	BG
493	2	Dn^2	mn^2
494	8	sin. $\frac{1}{2}$ (a + c — d)	sin. $\frac{1}{2}$ (a + b — d)
498	27	90° — a	90° — $\frac{1}{2}$ a

497 Soll ganz unten nach der Anmerkung stehen:

Zusatz: Bezeichnet man in den beyden Dreyecken mit den größern Buchstaben die Winkel und ihre opponirten Seiten mit den nemlichen kleinern Buchstaben, so ist:

In der II. Tabelle zum 419. §. VI. Fall.

statt

ſtatt $\sin. \frac{1}{2} a^2$

$$= \frac{\sin. \frac{1}{2}(A + B - D) \sin. \frac{1}{2}(A + D - B)}{\sin. B. \sin. D} r^2$$

lies: $\cos. \frac{1}{2} a^2$

$$= \frac{\cos. \frac{1}{2}(A + B - D) \cos. \frac{1}{2}(A + D - B)}{\sin. B \sin. D} r^2$$

Staatliche Bibliothek
Regensburg

München, gedruckt mit Zängliſchen Schriften.

Fig. 4.

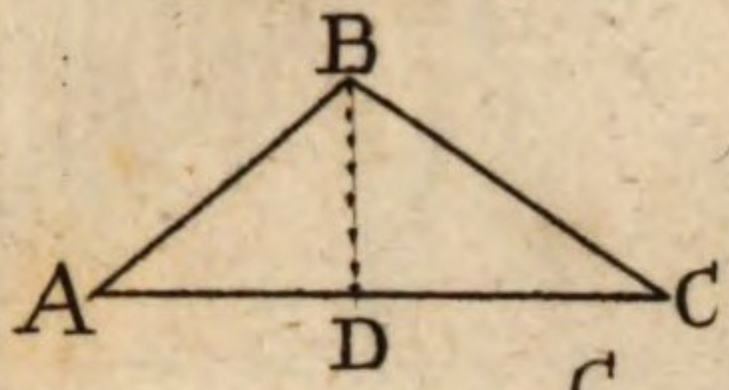


Fig. 5.

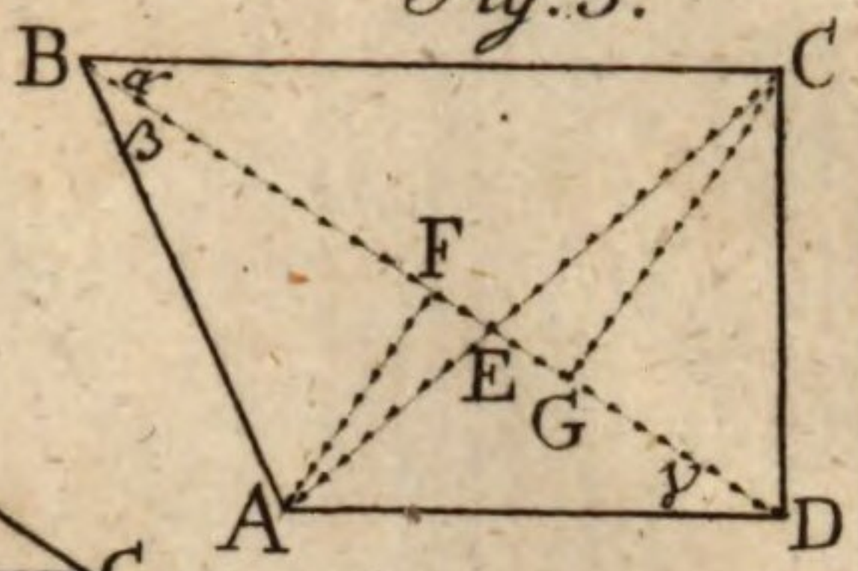


Fig. 6.

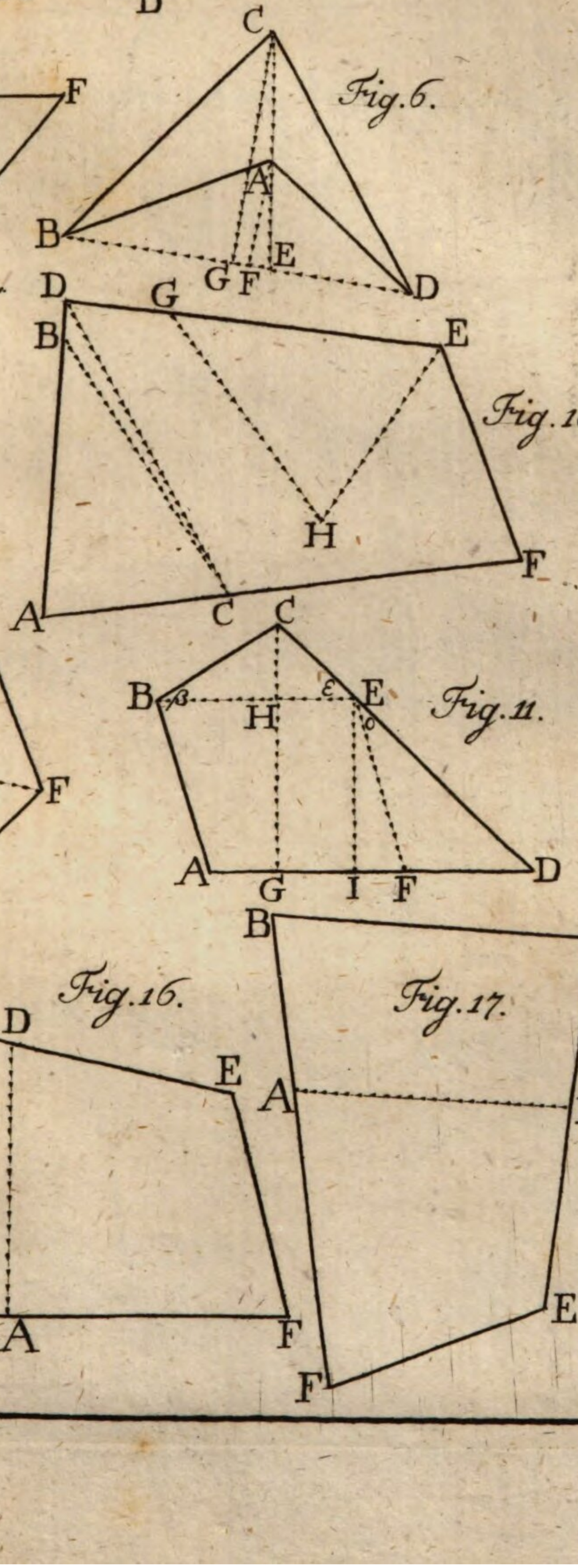


Fig. 10.

Fig. 11.

Fig. 16.

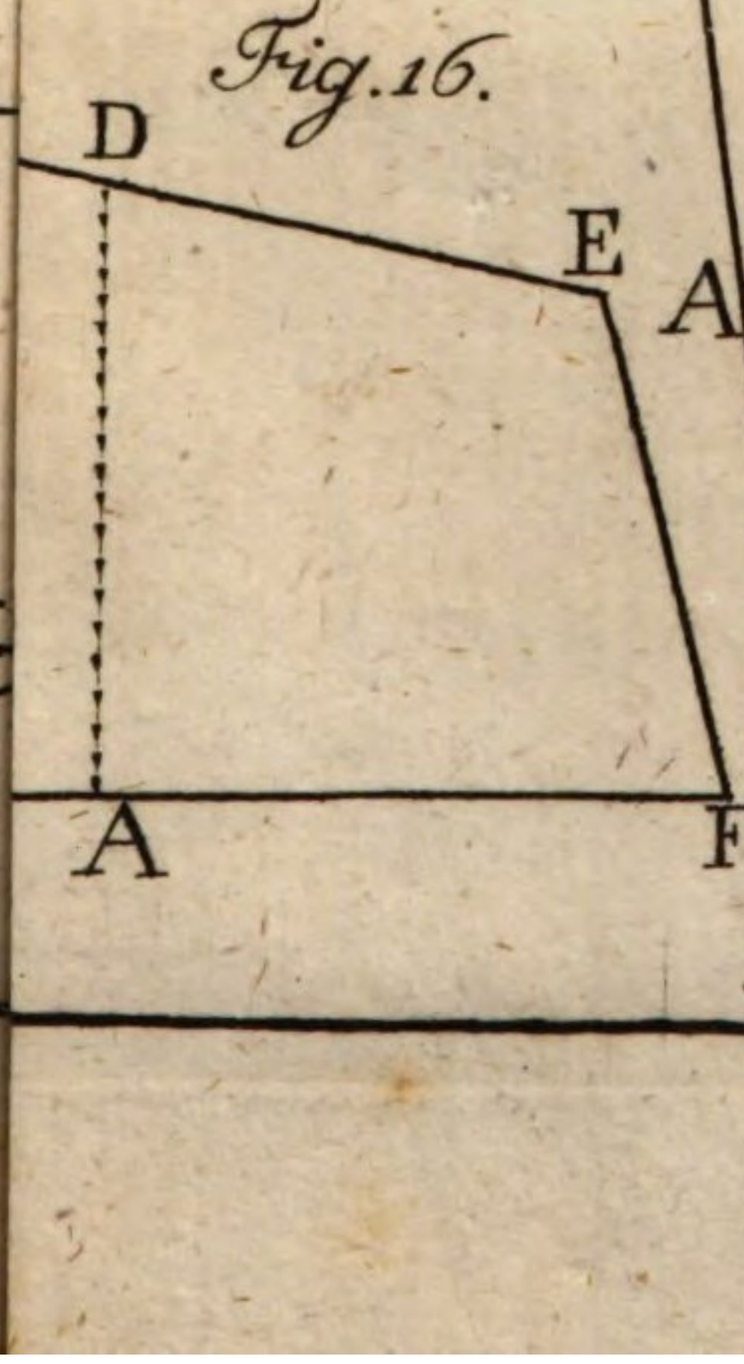
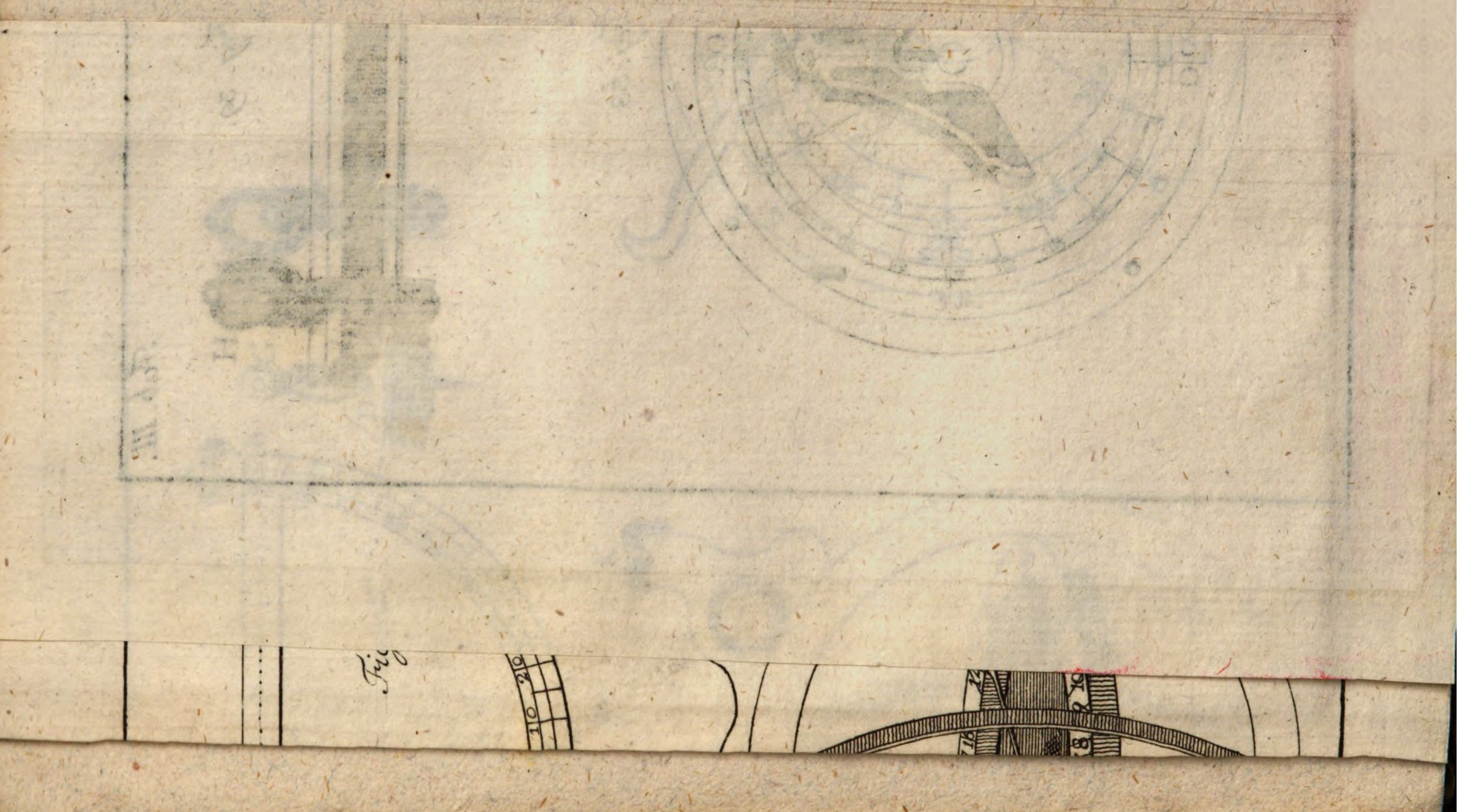


Fig. 17.

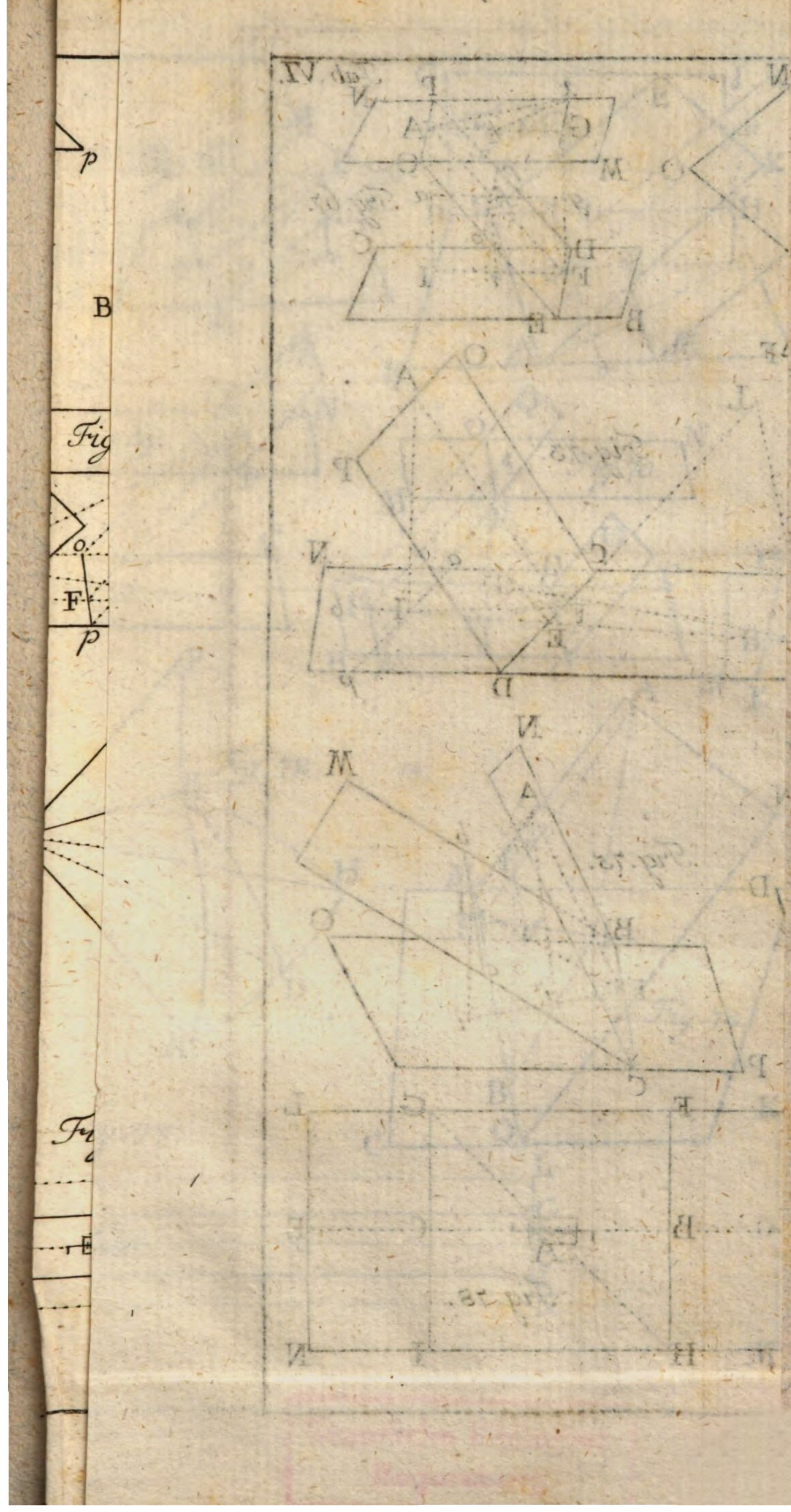
Fig. 20.

Fig. 2

Iq



g. 55.


p
B
Fig
F
p

$$\text{fin. } (A+B+C+D+E) + e^2 \text{ fin. } (A+B+C+D+E)^2$$

$$\text{os. } (A+B+C+D+E) + e^2 \text{ cos. } (A+B+C+D+E)^2$$

$$D+E) - 2b\ e \text{ cos. } (C+D+E) + 2c\ e \text{ cos. } (D+E)$$

2

a

$\frac{}{}$ + B + C + D)

+ D + $\frac{1}{2}$ d² sin. 2 (A + B + C + D)

ez bt, wegläßt

in 3) — f b sin. (A + B) + a b cos. A sin. (A + B)

((A + B + C) cos.. (A + B + C + D)

(A + B + C + D); oder anders geordnet

A

os + B + C + D) — sin. A cos. (A + B + C + D))

s. A + B + C + D))

os

+ 307, Trigonometrie)

C))

+ D) = sin. (C + D) u. s. f.

in

A + D)

C -

ibe.

Anmerkungen.

a) Am Rundbaume des Schachtes angehalten, und 10 Lachter abgeseigert.

b) Am Ende der Schnur auf einen alten Bau getroffen.

c) Hier steht 'ganz Ort an.

Schnüren.

an	Breite.	Stuffen.	Anmerkungen.
.	—		
	der westl.		
	Prim.		
	—	a	a) Das Streichen von Nr. 1 ist 4 St. $\frac{3}{15}$.
	—		
	—		
	—		

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Magold, Maurus,

Lehrbuch der Polygonometrie und Markscheidekunst zum Gebrauche ö ffentlicher Vorlesungen auf der churfürstl. baierischen Universität in Landshut ; mit 4 gedruckten Tabellen

Landshut 1804

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.5314(3,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11112237-7